Digitized by Google

FONDO PIZZOFALCONE

Digitized by Google

B.P
I
584, 584 bis - 587

Digitized by Google

Digitized by Google

COURS
DE
MATHÉMATIQUES.

TOME PREMIER.

Digitized by Google

Digitized by Google

C06750 SBN
S06355

COURS
DE
MATHÉMATIQUES,
A L'USAGE
DU CORPS DE L'ARTILLERIE.

PAR M. BÉZOUT, de l'Académie des Sciences et de celle de Marine, Examinateur des Élèves et des Aspirans au Corps de l'Artillerie, et des Gardes du Pavillon et de la Marine; Censeur de Livres.

TOME PREMIER,

Contenant l'ARITHMÉTIQUE, la GÉOMÉTRIE et la TRIGONOMÉTRIE RECTILIGNE.

Nouvelle Édition, revue, corrigée et augmentée de l'Exposition abrégée du nouveau Système des Poids et Mesures, d'après le Mètre définitif; par le C. GUILLARD, Professeur de Mathématiques.

A PARIS,
Chez RICHARD, CAILLE et RAVIER, Libraires, rue Haute-Feuille, N°. 11.

AN VIII.

BIBLIOTECA NAZIONALE "VITTORIO EMANUELE III" NAPOLI

Digitized by Google

Digitized by Google

AVIS
DES LIBRAIRES,

Sur cette nouvelle Édition.

LE Cours de Mathématiques de Bézout, à l'usage du Corps de l'Artillerie, est un des Ouvrages de ce genre le plus estimé. La méthode de l'Auteur et la clarté des principes en ont fait un Livre classique et indispensable pour ceux qui se livrent à l'étude de cette science. Le Savant estimable qui succéda à Bézout, dans la place d'Examinateur des Élèves du Corps de l'Artillerie, en jugea de même en se servant de ce Cours dans ses leçons et dans ses examens.

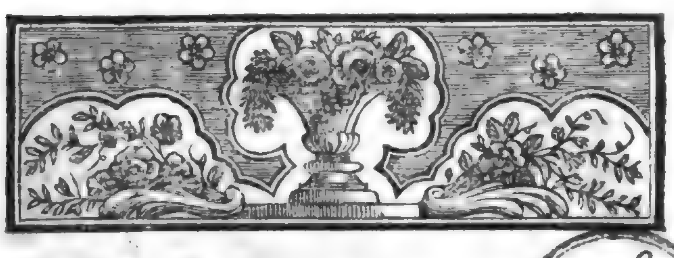
L'Édition de cet Ouvrage, faite au Louvre sous les yeux de l'Auteur, étant devenue rare, c'est rendre service

Digitized by Google

au Public que d'en donner une réimpression aussi semblable que les caractères ont pu le permettre. Nous ne nous flattons pas d'être exempts de fautes ; mais avec le secours d'une personne instruite dans ces matières, nous espérons avoir évité quelques erreurs échappées à l'attention de l'Auteur. Nous nous sommes sur-tout attachés à la netteté des caractères algébriques et des fractions. Nous n'avons rien épargné pour le papier et pour les gravures ; nous croyons donc avoir donné à notre Édition un mérite que n'ont pas les différentes réimpressions de ce Livre que l'on trouve dans le Commerce.

ÉLÉMENS

Digitized by Google



ÉLÉMENS D'ARITHMÉTIQUE.

Notions préliminaires sur la nature et les différentes espèces de Nombres.

1. On appelle, en général, *quantité*, tout ce qui est susceptible d'augmention ou de diminution. L'étendue, la durée, le poids, etc. sont des quantités. Tout ce qui est quantité, est de l'objet des Mathématiques ; mais l'Arithmétique qui fait partie de ces Sciences, ne considère les quantités, qu'en tant qu'elles sont exprimées en nombres.

2. L'Arithmétique est donc la science des nombres : elle en considère la nature et les propriétés ; et son but est de donner des moyens aisés, tant pour représenter les nombres, que

Digitized by Google

pour les composer et décomposer ; ce qu'on appelle *calculer.*

3. Pour se former une idée exacte des nombres, il faut d'abord savoir ce qu'on entend par *unité.*

4. L'unité est une quantité que l'on prend (le plus souvent arbitrairement) pour servir de terme de comparaison à toutes les quantités d'une même espèce.

Ainsi, lorsqu'on dit, un tel corps pèse cinq livres ; la livre est l'unité ; c'est la quantité, à laquelle on compare le poids de ce corps ; on auroit pu, également, prendre l'once pour unité, et alors le poids de ce corps eût été marqué par quatre-vingt.

5. Le nombre exprime de combien d'unités, ou de parties d'unités, une quantité est composée.

Si la quantité est composée d'unités entières, le nombre qui l'exprime s'appelle *nombre entier :* et si elle est composée d'unités entières, et de parties de l'unité, ou simplement de parties de l'unité, alors le nombre est dit *fractionnaire* ou *fraction : trois et demi* font un nombre fractionnaire : *trois quarts* forment une fraction.

6. Un nombre qu'on énonce sans désigner l'espèce des unités, comme quand on dit simplement *trois* ou *trois fois*, *quatre*, ou *quatre*

Digitized by Google

fois, s'appelle un *nombre abstrait* ; et lorsqu'on énonce en même temps l'espèce des unités, comme quand on dit *quatre livres*, *cent boulets*, on l'appelle *nombre concret*.

Nous définirons les autres espèces de nombres, à mesure qu'il en sera question.

De la Numération et des Décimales.

7. La *numération* est l'art d'exprimer tous les nombres, par une quantité limitée de noms et de caractères. Ces caractères s'appellent *chiffres*.

8. Les caractères dont on fait usage dans la numération actuelle, et les noms des nombres qu'ils représentent, sont tels qu'on les voit ici :

0,	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9.
zéro,	un,	deux,	trois,	quatre,	cinq,	six,	sept,	huit,	neuf.

Pour exprimer tous les autres nombres, avec ces caractères, on est convenu que de dix unités, on en feroit une seule à laquelle on donneroit le nom de *dixaine*, et que l'on compteroit par dixaines, comme on compte par unités, c'est-à-dire, que l'on compteroit *deux dixaines*, *trois dixaines*, etc. jusqu'à 9 dixaines : que pour représenter ces nouvelles unités, on emploieroit les mêmes chiffres que pour les unités simples, mais qu'on les distingueroit de celles-ci, par la

place qu'on leur feroit occuper, en les mettant à la gauche des unités simples.

Ainsi, pour représenter *cinquante-quatre*, qui renferment cinq dixaines et quatre unités, on est convenu d'écrire 54. Pour représenter *soixante*, qui contiennent un nombre exact de dixaines et point d'unités, on écrit 60, en mettant un zéro, qui, tout à la fois, marque qu'il n'y a point d'unités simples, et que le nombre 6, est un nombre de dixaines.

On peut, par ce moyen, compter jusqu'à quatre-vingt-dix-neuf inclusivement.

9. Remarquons, en passant, cette propriété de la numération actuelle ; savoir, qu'un chiffre placé à la gauche d'un autre, ou suivi d'un zéro, représente un nombre dix fois plus grand que s'il étoit seul.

10. Depuis 99, on peut compter jusqu'à neuf cents quatre-vingt-dix-neuf, par une convention semblable. De dix dixaines, on composera une seule unité qu'on nommera *Centaine*, parce que dix fois dix font cent ; on comptera ces centaines, depuis un jusqu'à neuf, et on les représentera par les mêmes chiffres, mais en plaçant ces chiffres à la gauche des dixaines.

Ainsi, pour marquer *huit cents cinquante-neuf*, qui contiennent huit centaines, cinq dixaines et neuf unités, on écrira 859. Si on avoit *huit cents neuf* qui contiennent huit centaines, point de dixaines et neuf unités, on écriroit 809 ;

c'est-à-dire, que l'on mettroit un zéro pour tenir la place des dixaines qui manquent. Si les unités manquoient aussi, on mettroit deux zéros ; ainsi pour marquer *huit cents*, on écriroit 800.

11. Rémarquons encore, qu'en vertu de cette convention, un chiffre suivi de deux autres, ou de deux zéros, marque un nombre cent fois plus grand que s'il étoit seul.

12. Depuis neuf cents quatre-vingt-dix-neuf, on peut compter, par le même artifice, jusqu'à neuf mille neuf cents quatre-vingt-dix-neuf; en formant de dix centaines, une unité qu'on appelle *mille*, parce que dix fois cent font mille ; comptant ces unités comme ci-devant, et les représentant par les mêmes chiffres placés à la gauche des centaines.

Ainsi, pour marquer *sept mille huit cents cinquante-neuf*, on écrira 7859 ; pour marquer *sept mille neuf*, on écrira 7009 ; et pour *sept mille*, on écrira 7000 ; où l'on voit, qu'un chiffre suivi de trois autres ou de trois zéros, marque un nombre mille fois plus grand que s'il étoit seul.

13. En continuant, ainsi, de renfermer dix unités d'un certain ordre, dans une seule unité, et de placer ces nouvelles unités dans des rangs de plus en plus avancés vers la gauche, on parvient à exprimer d'une manière uniforme et avec dix caractères seulement, tous les nombres entiers imaginables.

Digitized by Google

14. Pour énoncer facilement un nombre exprimé par tant de chiffres qu'on voudra, on le partagera, par la pensée, en tranches de trois chiffres chacune, en allant de droite à gauche : on donnera à chaque tranche les noms suivans, en partant de la droite ; *unités*, *milles*, *millions*, *billions*, *trillions*, *quatrillions*, *quintillions*, *sextillions*, etc. Le premier chiffre de chaque tranche (en partant toujours de la droite) aura le nom de la tranche ; le second, celui de dixaines ; et le troisième, celui de centaines ; alors en partant de la gauche, on énoncera chaque tranche, comme si elle étoit seule, et on prononcera, à la fin de chacune, le nom de cette même tranche.

Par exemple, pour énoncer le nombre suivant ;

quatrillions,	trillions,	billions,	millions,	milles,	unités.
23,	456,	789,	234,	565,	456.

On dira vingt-trois *quatrillions*, quatre cents cinquante-six *trillions*, sept cents quatre-vingt-neuf *billions*, deux cents trente-quatre *millions*, cinq cents soixante-cinq *mille*, quatre cents cinquante-six *unités*.

15. De la numération que nous venons d'exposer, et qui est purement de convention, il résulte qu'à mesure qu'on avance de droite à gauche, les unités dont chaque nombre est composé, sont de dix en dix fois plus grandes, et que par conséquent pour rendre un nombre dix fois, cent fois, mille fois plus grand, il suffit

Digitized by Google

de mettre à la suite du chiffre de ses unités, un, deux, trois, etc. zéros : au contraire, à mesure qu'on rétrograde de gauche à droite, les unités sont de dix en dix fois plus petites.

16. Telle est la numération actuelle : elle est la base de toutes les autres manières de compter, quoique dans plusieurs Arts on ne s'assujettisse pas toujours uniquement à compter par dixaines, par dixaines de dixaines, etc.

17. Pour évaluer les quantités plus petites que l'unité qu'on a choisie, on partage celle-ci en d'autres unités plus petites. Le nombre en est indifférent en lui-même ; il suffit qu'il puisse mesurer les quantités qu'on a dessein de mesurer; mais ce qu'on doit avoir principalement en vue, dans ces sortes de divisions, c'est de rendre les calculs les plus commodes qu'il sera possible ; c'est pour cette raison, qu'au lieu de partager d'abord l'unité en un grand nombre de parties, afin de pouvoir évaluer les plus petites, on ne la partage, d'abord, qu'en un certain nombre de parties, et qu'on subdivise celles-ci, en d'autres, et ces nouvelles, encore en d'autres plus petites. C'est ainsi que, dans les monnoies, on partage la livre en 20 parties qu'on appelle *sous*, le sou en 12 parties qu'on appelle *deniers*. De même dans les mesures de poids, on partage la livre

en 2 *marcs*, le marc en 8 *onces*, l'once en 8 *gros*, etc. en sorte que dans le premier cas, on compte par vingtaines et par douzaines ; dans le second, par deuzaines et par huitaines, etc.

18. Un nombre qui est composé de parties rapportées, ainsi, à différentes unités, est ce qu'on appelle un nombre *complexe ;* et par opposition, celui qui ne renferme qu'une seule espèce d'unités, s'appelle *nombre incomplexe.* 8^{tt} ou 8 livres sont un nombre incomplexe. 8^{tt} 17^{s} 8^{d} ou 8 livres 17 sous 8 deniers, sont un nombre complexe.

19. Chaque Art subdivise, à sa manière, l'unité principale qu'il s'est choisie. Les subdivisions de la toise sont différentes de celle de la livre, celles de la livre différentes de celle du jour, de l'heure ; celles-ci différentes de celles du marc, et ainsi de suite : nous les ferons connoître lorsque nous traiterons des nombres complexes.

20. Mais de toutes les divisions et subdivisions qu'on peut faire de l'unité, celle qui se fait par décimales ; c'est-à-dire, en partageant l'unité en parties de dix en dix fois plus petites, est incontestablement la plus commode dans les calculs. Elle est fort en usage dans la pratique des Mathématiques ; la formation et le calcul

Digitized by Google

des décimales sont absolument les mêmes que pour les nombres ordinaires ou entiers. nous allons les faire connoître.

21. Pour évaluer, en décimales, les parties plus petites que l'unité, on conçoit que cette unité, telle qu'elle soit, livre, toise, etc. est composée de 10 parties, comme on imagine la dixaine composée de dix unités simples. Ces nouvelles unités, par opposition aux dixaines, sont nommées *dixièmes;* et comme dix fois plus petites que l'unité, on les place à la droite du chiffre qui représente les unités.

Mais pour prévenir l'équivoque, et ne point donner lieu de prendre les unités pour des dixaines, on est convenu en même temps de fixer, une fois pour toutes, la place des unités, par une marque particulière : celle qui est le plus en usage, est une virgule que l'on met à la droite du chiffre qui représente les unités, ou, ce qui est la même chose, entre les unités et les dixièmes.

Ainsi, pour marquer vingt-quatre unités et trois dixièmes, on écrira 24,3.

22. On peut, de même, regarder actuellement les dixièmes, comme des unités qui ont été formées de dix autres, chacune dix fois plus petites que les dixièmes, et par la même raison

Digitized by Google

d'analogie, les placer à la droite des *dixièmes*. Ces nouvelles unités, dix fois plus petites que les dixièmes, seront cent fois plus petites que les unités principales, et pour cette raison seront nommées *centièmes*.

Ainsi, pour marquer vingt-quatre unités, trois dixièmes, et cinq centièmes, on écrira 24,35.

23. Concevons pareillement les centièmes, comme formés de dix parties; ces parties seront mille fois plus petites que l'unité principale, et pour cette raison seront nommées *millièmes;* et comme dix fois plus petites que les *centièmes*, on les placera à la droite de celles-ci. En continuant de subdiviser ainsi de dix en dix, on formera de nouvelles unités qu'on nommera successivement des *dix-millièmes*, *cent-millièmes*, *millionièmes*, *dix-millionièmes*, *cent-millionièmes*, *billionièmes*, etc. et qu'on placera dans des rangs de plus en plus reculés sur la droite de la virgule.

24. Les parties de l'unité, que nous venons de décrire, sont ce qu'on appelle les *décimales*.

25. Quant à la manière de les énoncer, elle est la même que pour les autres nombres. Après avoir énoncé les chiffres qui sont à la gauche de la virgule, on énonce les décimales de la même manière; mais on ajoute à la fin, le nom des unités décimales de la dernière espèce.

Digitized by Google

Ainsi, pour énoncer ce nombre 34,572; on diroit trente-quatre unités, et cinq cents soixante-douze *millièmes;* si c'étoient des toises, par exemple, on diroit trente-quatre toises; et cinq cents soixante-douze *millièmes* de toise.

La raison en est facile à apercevoir, si on fait attention que dans le nombre 34,572, le chiffre 5 peut indifféremment être rendu, ou par cinq *dixièmes*, ou par cinq cents *millièmes*, puisque le *dixième* ayant été composé de 10 *centièmes*, et le *centième* de 10 *millièmes*, le *dixième* contiendra 100 *millièmes*. Il en est de même du chiffre 7, qu'on peut indifféremment énoncer, sept *centièmes*, ou soixante-dix *millièmes*, puisque le *centième* a été composé de 10 *millièmes*.

26. A l'égard de l'espèce des unités du dernier chiffre, on la trouvera toujours facilement, en comptant successivement de gauche à droite, sur chaque chiffre depuis la virgule, les noms suivans... *dixièmes*, *centièmes*, *millièmes*, *dix-millièmes*, etc.

27. Si l'on n'avoit point d'unités entières, mais seulement des parties de l'unité, on mettroit un zéro pour tenir la place des unités; ainsi pour marquer 125 *millièmes*, on écriroit 0,125. Si on vouloit marquer 25 *millièmes*, on écriroit 0,025 en mettant un zéro, tant pour marquer qu'il n'y

a point de *dixièmes*, que pour donner aux parties suivantes leur véritable valeur. Par la même raison, pour marquer 6 *dix-millièmes*, on écriroit 0,0006.

28. Examinons, maintenant, les changemens qu'on peut faire naître dans un nombre, par le déplacement de la virgule.

Puisque la virgule détermine la place des unités, et que tous les autres chiffres ont des valeurs dépendantes de leurs distances à cette même virgule; si on avance la virgule d'une, deux, ou trois, etc. places sur la gauche, on rend le nombre, 10, 100, 1000, etc. fois plus petit; et au contraire, on le rend 10, 100, 1000, etc. fois plus grand, si on recule la virgule d'une, deux, trois, etc. places sur la droite.

En effet, si on a le nombre 4327,5264; et qu'en avançant la virgule d'une place sur la gauche, on écrive 432,75264, il est visible que les mille du premier nombre, sont des centaines dans le nouveau; les centaines, sont des dixaines; les dixaines, des unités; les unités, des dixièmes; les dixièmes, des centièmes; et ainsi de suite. Donc chaque partie du premier nombre, est devenue 10 fois plus petite par ce déplacement. Si, au contraire, en reculant la virgule d'une place sur la droite, on eût écrit 43275,264; les

Digitized by Google

mille du premier nombre, se trouveroient changés en dixaines de mille; les centaines, en mille; les dixaines, en centaines; les unités, en dixaines; les dixièmes, en unités; et ainsi de suite. Donc le nouveau nombre est dix fois plus grand que le premier.

Un raisonnement semblable fait voir qu'en avançant, sur la gauche, de deux ou de trois places, on rendroit le nombre 100 ou 1000 fois plus petit; et au contraire 100 ou 1000 fois plus grand, en reculant la virgule de deux ou de trois places sur la droite.

29. La dernière observation que nous ferons sûr les décimales, est qu'on n'en change point la valeur, en mettant à la suite du derniér chiffre décimal, tel nombre de zéros qu'on voudra. Ainsi 43,25 est la même chose que 43,250, ou que 43,2500, ou que 43,25000, etc.

Car chaque *centième* valant 10 *millièmes*, ou 100 *dix-millièmes*, etc. les 25 *centièmes* vaudront 250 *millièmes*, ou 2500 *dix-millièmes*, etc. en un mot, c'est la même chose que lorsqu'au lieu de dire 3 sous, on dit 36 deniers.

Des Opérations de l'Arithmétique.

30. Ajouter, soustraire, multiplier et diviser, sont les quatre opérations fondamentales de l'Arith-

métique. Toutes les questions qu'on peut proposer sur les nombres, se réduisent à pratiquer quelques-unes de ces opérations, ou toutes ces opérations. Il est donc important de se les rendre familières, et d'en bien saisir l'esprit.

31. Le but de l'Arithmétique est, comme nous l'avons déjà dit, de donner des moyens de calculer facilement les nombres. Ces moyens consistent à réduire le calcul des nombres les plus composés, à celui des nombres plus simples, ou exprimées par le plus petit nombre de chiffres possible. C'est ce qu'il s'agit d'exposer actuellement.

De l'Addition des Nombres entiers et des Parties décimales.

32. Exprimer la valeur totale de plusieurs nombres, par un seul, est ce qu'on appelle *faire une addition*.

Pour trouver cette valeur totale, qu'on appelle *somme*, il faut observer la règle suivante.

Écrivez, les uns sous les autres, tous les nombres proposés, de manière que les chiffres des unités de chacun, soient dans une même colonne verticale; qu'il en soit de même des dixaines, de même des centaines, etc. soulignez le tout.

Ajoutez, d'abord, tous les nombres qui sont

Digitized by Google

dans la colonne des unités; si la somme ne passe pas 9, écrivez-là au-dessous; si elle surpasse 9, elle renfermera des dixaines; n'écrivez au-dessous que l'excédant du nombre des dixaines; comptez ces dixaines pour autant d'unités, et ajoutez-les avec les nombres de la colonne suivante: observez à l'égard de la somme des nombres de cette seconde colonne, la même règle qu'à l'égard de la première, et continuez ainsi, de colonne en colonne, jusqu'à la dernière, au-dessous de laquelle vous écrirez la somme telle que vous la trouverez. Éclaircissons cette règle par des exemples.

EXEMPLE I.

Qu'il soit question d'ajouter 54925 avec 2023: j'écris ces deux nombres comme on le voit ici... 54925

2023

56948 somme.

Et après avoir souligné le tout, je commence par les unités, en disant 5 et 3 font 8, que j'écris sous cette même colonne.

Je passe à celle des dixaines, dans laquelle je dis 2 et 2 font 4, que j'écris au-dessous.

A la colonne des centaines, je dis 9 et 0 font 9, que j'écris sous cette même colonne.

Dans la colonne des mille, je dis 4 et 2 font 6, que j'écris sous cette colonne.

Enfin dans la colonne des dixaines de mille, je dis 5 et rien font 5, que j'écris de même au-dessous.

Digitized by Google

Le nombre 56948, trouvé par cette opération, est la somme des deux nombres proposés, puisqu'il en renferme les unités, les dixaines, les centaines, les milles, et les dixaines de mille, que nous avons rassemblées successivement.

EXEMPLE II.

On demande la somme des quatre nombres suivans, 6903, 7854, 953, 7327 : je les écris comme on le voit ci-après.

$$\begin{array}{r} 6903 \\ 7854 \\ 953 \\ 7327 \\ \hline 23037 \text{ somme.} \end{array}$$

Et en commençant, comme ci-dessus, par la droite, je dis 3 et 4 font 7, et 3 font 10, et 7 font 17 ; j'écris les 7 unités sous la première colonne, et je retiens la dixaine pour la joindre, comme unité, aux nombres de la colonne suivante, qui sont aussi des dixaines.

Passant à cette seconde colonne, je dis, 1 que je retiens et 0 font 1, et 5 font 6, et 5 font 11, et 2 font 13 ; j'écris 3 sous la colonne actuelle, et je retiens, pour la dixaine, une unité que j'ajoute à la colonne suivante, en disant, 1 et 9 font 10, et 8 font 18, et 9 font 27, et 3 font 30 ; je pose 0 sous cette colonne, et je retiens pour les trois dixaines, trois unités, que j'ajoute à la colonne suivante, en disant pareillement 3 et 6 font 9, et 7 valent 16, et 7 font 23 ; j'écris 3 sous cette colonne, et comme il n'y a plus d'autre colonne, j'avance d'une place les deux dixaines qui appartiendroient à la colonne suivante, s'il y en avoit une. Le nombre 23037, est la somme des quatre nombres proposés.

33.

Digitized by Google

33. S'il y a des parties décimales, comme elles se comptent par dixaines, à mesure qu'on avance de droite à gauche, ainsi que les autres nombres, la règle pour les ajouter est absolument la même, en observant de mettre toujours les unités de même ordre, dans une même colonne.

Ainsi, si on propose d'ajouter les trois nombres 72,957... 12,8....124,03, j'écrirai...,

72,957
12,8
124,03
209,787 somme.

Et en suivant la règle ci-dessus, j'aurai 209,787 pour la somme.

De la Soustraction des Nombres entiers et des Parties décimales.

34. La soustraction est l'opération par laquelle on retranche un nombre, d'un autre nombre. Le résultat de cette opération, s'appelle *reste* ou *excès* ou *différence*.

35. Pour faire cette opération, on écrira le nombre qu'on veut retrancher, au-dessous de l'autre, de la même manière que dans l'addition; et ayant souligné le tout, on retranchera, en allant de droite à gauche, chaque nombre inférieur, de son correspondant supérieur; c'est-à-dire, les unités, des unités; les dixaines, des dixaines, etc.

on écrira chaque reste au-dessous, dans le même ordre, et zéro lorsqu'il ne restera rien.

Lorsque le chiffre inférieur se trouvera plus grand que le chiffre supérieur correspondant, on ajoutera à celui-ci, dix unités qu'on aura en empruntant, par la pensée, une unité sur son voisin à gauche, lequel doit, par cette raison, être regardé comme moindre d'une unité, dans l'opération suivante.

EXEMPLE I.

On propose de retrancher 5432, de 8954. J'écris ces deux nombres comme il suit.

8954
5432
3522 reste.

Et en commençant par le chiffre des unités, je dis 2 ôté de 4, il reste deux que j'écris au-dessous : puis, passant aux dixaines, je dis 3 ôté de 5, il reste 2 que j'écris sous les dixaines. A la troisième colonne, je dis 4 ôté de 9, il reste 5 que j'écris sous cette colonne. Enfin à la quatrième, je dis 5 ôté de 8, il reste 3 que j'écris sous 5, et j'ai 3522 pour le reste de 5432 retranché de 8954.

EXEMPLE II.

On veut ôter 7987, de 27646.

On écrira............... 27646
7987
19659 reste.

Digitized by Google

Comme on ne peut ôter 7 de 6, on ajoutera à 6, dix unités qu'on empruntera en prenant une unité sur son voisin 4, et on dira 7 ôté de 16, il reste 9 qu'on écrira sous 7.

Passant aux dixaines, on ne dira plus 8 ôté de 4, mais 8 ôté de 3 seulement, parce que l'emprunt qu'on a fait, a diminué 4 d'une unité : comme on ne peut ôter 8 de 3, on ajoutera de même à 3, dix unités qu'on empruntera, en prenant une unité sur le chiffre 6 de la gauche; et on dira 8 ôté de 13, il reste 5 qu'on écrira sous 8. Passant à la troisième colonne, on dira, de même, 9 ôté de 5, ou plutôt 9 ôté de 15 (en empruntant comme ci-dessus), il reste 6 qu'on écrira sous 9.

A la quatrième colonne, on dira, par la même raison, 7 ôté de 6, ou plutôt de 16, il reste 9 qu'on écrira sous 7, et comme il n'y a rien à retrancher dans la cinquième colonne, on écrira sous cette colonne, non pas 2, parce qu'on vient d'emprunter une unité sur ce 2, mais seulement 1, et on aura 19659 pour le reste.

36. Si le chiffre sur lequel on doit faire l'emprunt, étoit un zéro, l'emprunt se feroit non pas sur ce zéro, mais sur le premier chiffre significatif qui viendroit après ; mais quoique ce soit alors emprunter 100 ou 1000 ou 10000, selon qu'il y a un, deux, ou trois zéros consécutifs, on n'en opérera pas moins comme ci-dessus; c'est-à-dire, qu'on ajoutera seulement 10, au chiffre pour lequel on emprunte ; et comme ces dix, sont censés pris sur les 100 ou 1000, etc. qu'on a empruntés, pour employer les 90 ou

Digitized by Google

les 990, etc. qui restent, on comptera les zéros suivans, pour autant de neuf; c'est ce que l'exemple ci-après va éclaircir.

EXEMPLE III.

	99
Si de.	20064
on veut retrancher	17489
	2575 reste.

On dira d'abord, 9 ôté de 4, ou plutôt de 14 (en empruntant sur le chiffre suivant) il reste 5. Puis pour ôter 8 de 5, comme cela ne se peut, et qu'il n'est pas possible non plus d'emprunter sur le chiffre suivant qui est un zéro, on empruntera sur le 2, une unité, laquelle vaut mille à l'égard du chiffre sur lequel on opère. De ce mille, on ne prendra que 10 qu'on ajoutera à 5, et on dira 8 ôté de 15, il reste 7.

Comme on n'a employé que dix unités sur mille qu'on a empruntées, on emploiera les 990 restantes, pour en retrancher les nombres qui répondent au-dessous des zéros; ce qui revient au même que de compter chaque zéro, comme s'il valoit 9: ainsi l'on dira 4 ôté de 9 reste 5, puis 7 ôté de 9 reste 2, et enfin 1 ôté de 1 il ne reste rien.

37. S'il y a des parties décimales dans les nombres sur lesquels on veut opérer, on suivra absolument la même règle; mais pour éviter tout embarras dans l'application de cette règle, il n'y aura qu'à rendre le nombre des chiffres décimaux le même dans chacun des deux nombres

Digitized by Google

proposés, en mettant un nombre suffisant de zéros à la suite de celui qui a le moins de décimales ; cette préparation ne change rien à la valeur de ce nombre (29).

EXEMPLE IV.

De 5403,25
on veut ôter 385,6532

Je mets deux zéros à la suite des décimales du nombre supérieur, après quoi j'opère sur les deux nombres ainsi préparés, précisément selon l'énoncé de la règle,

5403,2500
385,6532

5017,5968 reste;

et je trouve pour reste 5017,5968.

Au lieu de diminuer d'une unité le chiffre sur lequel on a emprunté ; on peut, si l'on veut, le laisser tel qu'il est, et augmenter, au contraire, d'une unité, celui que l'on doit en retrancher : le reste sera toujours le même.

De la preuve de l'Addition et de la Soustraction.

38. Ce qu'on appelle *preuve d'une opération arithmétique*, est une autre opération que l'on fait pour s'assurer de l'exactitude du résultat de la première.

La preuve de l'addition se fait en ajoutant de

nouveau par parties, mais en commençant par la gauche, les sommes qu'on a déjà ajoutées. On retranche la totalité de la première colonne, de la partie qui lui répond dans la somme inférieure : on écrit au-dessous, le reste, qu'on réduit par la pensée en dixaines, pour le joindre au chiffre suivant de cette même somme, et du total on retranche encore la totalité de la colonne supérieure ; on continue ainsi jusqu'à la dernière colonne, dont la totalité retranchée ne doit laisser aucun reste.

Ainsi, ayant trouvé ci-dessus que les quatre nombres

	6903
	7854
	953
	7327
ont pour somme.	23037
	3110

Pour vérifier ce résultat, j'ajoute les mêmes nombres en commençant par la gauche, et je dis 6 et 7 font 13, et 7 font 20, lesquels ôtés de 23, il reste 3 ou 3 dixaines, qui avec le chiffre suivant o font 30. Je passe à la seconde colonne, et je dis 9 et 8 font 17, et 9 font 26, et 3 font 29 que j'ôte de 30 ; il reste 1 ou une dixaine, qui jointe au chiffre suivant 3 fait 13. J'ajoute tous les nombres de la troisième colonne, en disant 5 et 5 font 10, et 2 font 12, qui ôtés de 13, il reste 1 ou une dixaine, laquelle ajoutée au chiffre suivant 7 fait 17 ; j'ajoute pareillement tous les nombres de la dernière colonne, en disant

3 et 4 font 7, et 3 font 10, et 7 font 17, qui ôtés de 17 il ne reste rien : d'où je conclus que la première opération est exacte.

39. La preuve de la soustraction se fait en ajoutant le reste trouvé par l'opération, avec le nombre retranché ; si la première opération a été bien faite, on doit reproduire le nombre dont on a retranché.

Ainsi je vois que dans le troisième exemple que nous avons donné ci-dessus, l'opération a été bien faite, parce qu'en ajoutant 17489 (nombre retranché) avec le reste 2575, je reproduis 20064, nombre dont on a retranché.

$$\begin{array}{r} 20064 \\ 17489 \\ \hline 2575 \\ \hline 20064 \end{array}$$

De la Multiplication.

40. Multiplier un nombre par un autre, c'est prendre le premier de ces deux nombres, autant de fois qu'il y a d'unités dans l'autre. Multiplier 4 par 3, c'est prendre 4, trois fois.

41. Le nombre qu'on doit multiplier, s'appelle le *multiplicande* ; celui par lequel on doit multiplier, s'appelle le *multiplicateur*, et le résultat de l'opération s'appelle *produit*.

Digitized by Google

42. Le mot *produit* a communément une acception beaucoup plus étendue ; mais nous avertissons expressément que nous ne l'emploierons que pour désigner le résultat de la multiplication.

Le multiplicande et le multiplicateur se nomment aussi, *facteurs* du produit ; ainsi 3 et 4 sont les facteurs de 12, parce que 3 fois 4 font 12.

43. Suivant l'idée que nous venons de donner de la multiplication, on voit qu'on pourroit faire cette opération en écrivant le multiplicande autant de fois qu'il y a d'unités dans le multiplicateur, et faisant ensuite l'addition ; par exemple, pour multiplier 7 par 3, on pourroit écrire

$$\begin{array}{r} 7 \\ 7 \\ 7 \\ \hline 21 \end{array}$$

Et la somme 21 résultante de cette addition, seroit le produit.

Mais lorsque le multiplicateur est tant soit peu considérable, l'opération devient fort longue ; ce que nous appelons proprement *multiplication*, est la méthode de parvenir à ce même résultat, par une voie plus courte.

44. Tant qu'on ne considère les nombres que d'une manière abstraite ; c'est-à-dire, sans faire

attention à la nature de leurs unités ; il importe peu, lequel des deux nombres proposés pour la multiplication, on prenne pour multiplicande ou pour multiplicateur.

Par exemple, si on a 4 à multiplier par 3, il est indifférent de multiplier 4 par 3, ou 3 par 4, le produit sera toujours 12 : en effet, 3 fois 4, ne sont autre chose que le triple de 1 fois 4 ; et 4 fois 3 sont le triple de 4 fois 1 : or il est évident que 1 fois 4 et 4 fois 1 sont la même chose ; et on peut appliquer le même raisonnement à tout autre nombre.

45. Mais lorsque par l'énoncé de la question, le multiplicateur et le multiplicande sont des nombres concrets, il importe de distinguer le multiplicande du multiplicateur : cette attention est principalement nécessaire dans la multiplication des nombres complexes, dont nous parlerons par la suite.

Au reste, cela est toujours aisé à distinguer : la question qui conduit à la multiplication dont il s'agit, fait toujours connoître quelle est la quantité qu'il s'agit de répéter plusieurs fois ; c'est-à-dire le multiplicande ; et quelle est celle qui marque combien de fois on doit répéter le multiplicande ; c'est-à-dire, quel est le multiplicateur.

46. Comme le multiplicateur est destiné à mar-

quer combien de fois on doit prendre le multiplicande, il est toujours un nombre abstrait.

Ainsi, quand on demande ce que doivent coûter 52 toises de bois, à raison de 36 livres la toise; on voit que le multiplicande est 36 livres, qu'il s'agit de répéter 52 fois, soit que ce 52 marque des toises ou toute autre chose.

47. Le produit qui est formé de l'addition répétée du multiplicande, aura donc des unités de même nature que le multiplicande.

Après cette petite digression sur la nature des unités du produit et de ses facteurs, revenons à la méthode pour trouver ce produit.

48. Les règles de la multiplication des nombres les plus composés, se réduisent à multiplier un nombre d'un seul chiffre par un nombre d'un seul chiffre. Il faut donc s'exercer à trouver soi-même le produit des nombres exprimés par un seul chiffre, en ajoutant successivement un nombre à lui-même. On peut aussi, si on le veut, faire usage de la Table suivante qu'on attribue à Pythagore.

Digitized by Google

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

La première bande de cette Table se forme en ajoutant 1 à lui-même, successivement.

La seconde, en ajoutant 2, de même.

La troisième, en ajoutant 3, et ainsi de suite.

49. Pour trouver par le moyen de cette table, le produit de deux nombres exprimés par un seul chiffre chacun, on cherchera l'un de ces deux nombres, le multiplicande, par exemple, dans la bande supérieure; et en partant de ce nombre, on descendra verticalement jusqu'à ce qu'on soit vis-à-vis du multiplicateur qu'on trouvera dans la première colonne. Le nombre sur lequel on se sera arrêté, sera le produit.

Digitized by Google

Ainsi pour trouver, par exemple, le produit de 9 par 6, ou combien font 6 fois 9; je descends depuis 9, pris dans la première bande, jusques vis-à-vis de 6 pris dans la première colonne; le nombre sur lequel je m'arrête est 54, par conséquent 6 fois 9 font 54.

En voilà autant qu'il en faut pour passer à la multiplication des nombres exprimés par plusieurs chiffres.

De la Multiplication par un nombre d'un seul chiffre.

50. Écrivez le multiplicateur, qu'on suppose ici d'un seul chiffre, sous le multiplicande, peu importe sous quel chiffre; mais pour fixer les idées, supposons que ce soit sous le chiffre des unités.

Multipliez, d'abord, le nombre des unités, par votre multiplicateur; et si le produit ne contient que des unités, écrivez ce produit au-dessous; s'il contient des unités et des dixaines, écrivez seulement les unités et comptant les dixaines pour autant d'unités, retenez celles-ci.

Multipliez, de même, le nombre des dixaines du multiplicande, et au produit ajoutez les unités que vous avez retenues; écrivez le tout au-dessous, s'il peut être marqué par un seul chiffre; sinon, n'écrivez que les unités de ce produit, et retenez-en les dixaines, qui sont des centaines, pour les

Digitized by Google

ajouter au produit suivant qui sera pareillement des centaines.

Continuez de multiplier successsivement, suivant la même règle, tous les chiffres du multiplicande ; la suite des chiffres que vous aurez écrits marquera le produit.

Exemple.

On demande combien 2864 toises, valent de pieds. La toise est de 6 pieds. La question se réduit à prendre 6 pieds, 2864 fois, ou ce qui revient au même (44) à prendre 2864 pieds, 6 fois.

J'écris donc. . . . . 2864 multiplicande.
6 multiplicateur.

17184. . . . . produit.

Et je dis, en commençant par les unités, 6 fois 4 font 24 ; j'écris 4, et je retiens 2 unités pour les deux dixaines.

2°. 6 fois 6 font 36, et 2 que j'ai retenues font 38 ; je pose 8 et je retiens 3.

3°. 6 fois 8 font 48, et 3 que j'ai retenues font 51 ; je pose 1 et je retiens 5.

4°. 6 fois 2 font 12, et 5 que j'ai retenues font 17 que j'écris en entier, parce qu'il n'y a plus rien à multiplier. Le nombre 17184 est le produit demandé, ou le nombre de pieds que valent les 2864 toises, puisqu'il renferme 6 fois les 4 unités, 6 fois les 6 dixaines, 6 fois les 8 centaines, et 6 fois les 2 mille, et par conséquent 6 fois le nombre 2864.

De la Multiplication par un nombre de plusieurs chiffres.

51. Lorsque le multiplicateur a plusieurs chiffres, il faut faire successivement avec chacun de ces chiffres, ce que l'on vient de prescrire lorsqu'il n'y en a qu'un, mais en commençant toujours par la droite : ainsi, on multipliera d'abord tous les chiffres du multiplicande, par le chiffre des unités du multiplicateur, puis par celui des dixaines, et on écrira ce second produit sous le premier ; mais comme il doit être un nombre de dixaines, puisque c'est par des dixaines qu'on multiplie, on portera le premier chiffre de ce produit sous les dixaines, et les autres chiffres toujours en avançant sur la gauche.

Le troisième produit qui se fera en multipliant par les centaines, se placera de même sous le second, mais en avançant encore d'une place : on suivra la même loi pour les autres.

Toutes ces multiplications étant faites, on ajoutera les produits particuliers qu'elles ont donnés, et la somme sera le produit total.

EXEMPLE.

On propose de multiplier....	65487
par................	6958
	523896
	327435
	589383
	392922
	455658546 produit.

Je multiplie d'abord 65487, par le nombre 8 des unités du multiplicateur, et j'écris successivement sous la barre, les chiffres du produit 523896 que je trouve en suivant la règle donnée pour le premier cas (50).

Je multiplie, de même, le nombre 65487 par le second chiffre 5 du multiplicateur, et j'écris le produit 327435 sous le premier produit, mais en plaçant le premier chiffre 5 sous les dixaines de ce premier produit.

Multipliant pareillement 65487 par le troisième chiffre 9, j'écris le produit 589383 sous le précédent, mais en plaçant le premier chiffre 3 au rang des centaines, parce que le nombre par lequel je multiplie est un nombre de centaines.

Enfin je multiplie 65487, par le dernier chiffre 6 du multiplicateur, et j'écris le produit 392922, sous le précédent, en avançant encore d'une place, afin que son dernier chiffre occupe la place des mille, parce que le chiffre par lequel on multiplie marque des mille : enfin j'ajoute tous ces produits, et j'ai 455658546, pour le produit de 65487 multiplié par 6958, c'est-à-dire pour la valeur de 65487 pris 6958 fois. En effet, on a pris 65487, 8 fois par la première opération, 50 fois par la

seconde, 900 fois par la troisième, et 6000 fois par la quatrième.

52. Si le multiplicande ou le multiplicateur, ou tous les deux, étoient terminés par des zéros; on abrégeroit l'opération, en multipliant comme si ces zéros n'y étoient point; mais on les mettroit ensuite, tous, à la suite du produit.

EXEMPLE.

On propose de multiplier.	6500
par.	350
	325
	195
	2275000

Je multiplie seulement 65 par 35, et je trouve 2275, à côté duquel j'écris les trois zéros qui se trouvent, en tout, à la suite du multiplicande et du multiplicateur. En effet, le multiplicande 6500, représente 65 centaines; ainsi quand on multiplie 65, on doit sous-entendre que le produit est des centaines. Pareillement le multiplicateur 350, marque 35 dixaines; ainsi quand on multiplie par 35, on doit sous-entendre que le produit sera des dixaines; il sera donc des dixaines de centaines, c'est-à-dire, des mille; il doit donc avoir 3 zéros: on appliquera un raisonnement semblable à tous les autres cas.

53. Lorsqu'il se trouve des zéros entre les chiffres du multiplicateur, comme la multiplication par ces zéros ne donneroit que des zéros, on se dispensera d'écrire ceux-ci dans le produit; et

Digitized by Google

et passant tout de suite à la multiplication par le premier chiffre significatif qui vient après ces zéros, on en avancera le produit sur la gauche d'autant de places plus une qu'il y a de zéros qui suivent dans le multiplicateur ; c'est-à-dire de deux places s'il y a un zéro, de trois, s'il y en a deux.

EXEMPLE.

Si l'on a.	42052
à multiplier par	3006
	252312
	126156
	126408312

Après avoir multiplié par 6, et écrit le produit 252312, on multipliera tout de suite par 3, mais on écrira le produit 126156, de manière qu'il marque des mille ; il faudra donc le reculer de trois places, c'est-à-dire, d'une place de plus qu'il n'y a de zéros interposés aux chiffres du multiplicateur.

De la Multiplication des Parties décimales.

54. Pour multiplier les parties décimales, on observera la même règle que pour les nombres entiers, sans faire aucune attention à la virgule ; mais après avoir trouvé le produit, on en séparera sur la droite, par une virgule, autant de chiffres

Digitized by Google

qu'il y a de décimales, tant dans le multiplicande que dans le multiplicateur.

EXEMPLE I.

On propose de multiplier	54,23
par.	8,3
	16269
	43384
	450,109

Je multiplierai 5423, par 83; le produit sera 450109; et comme il y a 2 décimales dans le multiplicande, et une dans le multiplicateur, je séparerai trois chiffres sur la droite de ce produit, qui par-là deviendra 450,109, tel qu'il doit être.

La raison de cette régle est facile à saisir, en observant que si le multiplicateur étoit 83, le produit n'auroit en décimales que des *centièmes*, puisqu'on auroit répété 83 fois le multiplicande 54,23 dont les décimales sont des centièmes; mais comme le multiplicateur est 8,3; c'est-à-dire, dix fois plus petit que 83, le produit doit donc être dix fois plus petit que dans ce premier cas, le dernier chiffre de ses décimales doit donc être des *millièmes;* il doit donc y avoir trois chiffres décimaux dans ce produit; c'est-à-dire, autant qu'il y en a, tant dans le multiplicande que dans le multiplicateur.

On peut appliquer un raisonnement semblable à tout autre cas.

Digitized by Google

EXEMPLE II.

Si on avoit.............	0,12
à multiplier par	0,3
	0,036

On multiplieroit 12 par 3, ce qui donneroit 36; comme la règle prescrit de séparer ici trois chiffres, on pourroit être embarrassé à y satisfaire; mais si on reprend le raisonnement que nous avons appliqué à l'exemple précédent, on verra facilement qu'il faut, comme on le voit ici, interposer un zéro entre 36 et la virgule. En effet, si on avoit 0,12 à multiplier par 3, il est évident qu'on auroit 0,36; mais comme on n'a à multiplier que par 0,3, c'est-à-dire, par un nombre dix fois plus petit que 3, on doit avoir un produit dix fois plus petit que 0,36, c'est-à-dire, des millièmes, et c'est ce qui a lieu (28) lorsqu'on écrit 0,036.

Sur quelques usages de la Règle précédente.

55. Nous ne nous proposons pas de faire connoître tous les usages qu'on peut faire de la multiplication. Nous en indiquerons seulement quelques-uns qui mettront sur la voie pour les autres.

56. La multiplication sert à trouver, en général, la valeur totale de plusieurs unités, lorsqu'on connoît la valeur de chacune.

Par exemple, 1°. combien doivent coûter 5842 toises,

à raison de 54# la toise? il faut multiplier 54# par 5842, ou (44) 5842# par 54; on aura 315468# pour le prix total demandé. 2°. Si une bombe de 8 pouces pèse 42$^{\text{liv.}}$, combien pèseront 5954 bombes de pareil diamètre? Il faut multiplier 42 par 5954, ou 5954 par 42; on aura 250068 pour le poids total des 5954 bombes.

57. On emploie la multiplication pour convertir des unités d'une certaine espèce, en unités d'une espèce plus petite. Par exemple, pour réduire les livres en sous, et ceux-ci en deniers; les toises en pieds, ceux-ci en pouces, ces derniers en lignes; les jours en heures, celles-ci en minutes, ces dernières en secondes; on a souvent besoin de ces sortes de conversions. Nous en donnerons quelques exemples.

Si on demande de convertir 8# 17^{s} 7^{d} en deniers; comme la livre vaut vingt sous, on multipliera les 8# par 20 (52), ce qui donnera 160 sous, auxquels joignant les 17 sous, on aura 177 sous, qu'on multipliera par 12, parce que chaque sou vaut 12 deniers, et on aura 2124 deniers, lesquels joints aux 7 deniers, donnent 2131 deniers pour la valeur de 8# 17^{s} 7^{d} convertis en deniers.

Si on demande combien une année commune, ou 365 jours, 5 heures, 48 minutes, ou 365j 5^{h} $48'$ valent de minutes? comme le jour est de 24 heures, on multipliera 24^{h} par 365, et au produit 8760^{h} on ajoutera 5^{h}; on multipliera le total 8765, par 60, (52) parce que l'heure contient 60 minutes, et on aura 525900 minutes, auxquelles ajoutant 48 minutes, on aura 525948 pour le nombre de minutes contenues dans une année commune.

De la Division des Nombres entiers et des Parties décimales.

58. *Diviser* un nombre par un autre, c'est, en général, chercher combien de fois le premier de ces deux nombres contient le second.

Le nombre qu'on doit diviser s'appelle *Dividende;* celui par lequel on doit diviser, *Diviseur;* et celui qui marque combien de fois le dividende contient le diviseur, s'appelle *Quotient.*

On n'a pas toujours pour but dans la division de savoir combien de fois un nombre en contient un autre; mais on fait l'opération dans tous les cas, comme si elle tendoit à ce but, c'est pourquoi on peut, dans tous les cas, la considérer comme l'opération par laquelle on trouve combien de fois le dividende contient le diviseur.

Il suit de-là que si on multiplie le diviseur par le quotient, on doit reproduire le dividende, puisque c'est prendre ce diviseur, autant de fois qu'il est dans le dividende; cela est général, soit que le quotient soit un nombre entier, soit qu'il soit un nombre fractionnaire.

Quant à l'espèce des unités du quotient, ce n'est ni par l'espèce de celles du dividende, ni par l'espèce de celles du diviseur, ni par l'une et l'autre qu'il faut en juger; car le dividende

Digitized by Google

et le diviseur restant les mêmes, le quotient qui sera aussi toujours le même numériquement, peut-être fort différent pour la nature de ses unités, selon la question qui donne lieu à cette division.

Par exemple, s'il est question de savoir combien 8# contiennent 4#, le quotient sera un nombre abstrait qui marquera 2 fois. Mais s'il est question de savoir combien pour 8# on fera faire d'ouvrage à raison de 4# la toise, le quotient sera 2 toises, qui est un nombre concret, et dont l'espèce n'a aucun rapport avec le dividende ni avec le diviseur.

Mais on voit en même temps, que la question seule qui conduit à faire la division dont il s'agit, décide la nature des unités du quotient.

De la Division d'un nombre composé de plusieurs chiffres par un nombre qui n'en a qu'un.

59. L'opération que nous allons décrire, suppose qu'on sache trouver combien de fois un nombre d'un ou deux chiffres, contient un nombre d'un seul chiffre. C'est une connoissance déjà acquise, quand on sait de mémoire les produits des nombres qui n'ont qu'un chiffre.

On peut aussi, pour y parvenir, faire usage de la Table que nous avons donnée ci-dessus (48). Par exemple, si

Digitized by Google

je veux savoir combien de fois 74 contient 9, je cherche le diviseur 9 dans la bande supérieure, et je descends verticalement jusqu'à ce que je rencontre le nombre le plus approchant de 74, c'est ici 72; alors le nombre 8 qui se trouve vis-à-vis 72, dans la première colonne, est le nombre de fois, ou le quotient que je cherche.

Cela supposé, voici comment se fait la division d'un nombre qui a plusieurs chiffres, par un nombre qui n'en a qu'un.

Écrivez le diviseur à côte du dividende, séparez l'un de l'autre par un trait, et soulignez le diviseur sous lequel vous écrirez les chiffres du quotient, à mesure que vous les trouverez.

Prenez le premier chiffre sur la gauche du dividende, ou les deux premiers chiffres, si le premier ne contient pas le diviseur.

Cherchez combien ce premier ou ces deux premiers chiffres contiennent le diviseur; écrivez ce nombre de fois sous le diviseur.

Multipliez le diviseur par le quotient que vous venez d'écrire, et portez le produit sous la partie du dividende que vous venez d'employer.

Enfin, retranchez le produit de la partie supérieure du dividende à laquelle il répond, et vous aurez un reste.

A côté de ce reste, descendez le chiffre suivant du dividende principal; et vous aurez un second dividende partiel, sur lequel vous opérerez comme

Digitized by Google

sur le premier, plaçant le quotient à droite de celui qu'on a déjà trouvé, multipliant de même le diviseur par ce quotient, écrivant et retranchant le produit comme ci-devant.

Vous descendrez, de même, à côté du reste de cette division, le chiffre du dividende qui suit celui que vous avez descendu, et vous continuerez toujours de la même manière jusqu'au dernier inclusivement.

Cette règle va être éclaircie par l'exemple suivant.

EXEMPLE.

On propose de diviser 8769 par 7.

J'écris ces deux nombres, comme on les voit ici :

dividende	7 diviseur
8769	$1252\frac{5}{7}$ quotient
7	
17	
14	
36	
35	
19	
14	
5	

Et commençant par la gauche du dividende, je devrois dire, en 8 mille, combien de fois 7 ? mais je dis simplement en 8, combien de fois 7 ? il y est une fois.

Digitized by Google

Cet 1 est naturellement mille, mais les chiffres qui viendront après, lui donneront sa véritable valeur ; c'est pourquoi j'écris simplement 1 sous le diviseur.

Je multiplie le diviseur 7 par le quotient 1, et je porte le produit 7 sous la partie 8 que je viens de diviser; faisant la soustraction, j'ai pour reste 1.

Ce reste 1, est la partie de 8 qui n'a pas été divisée, et est une dixaine à l'égard du chiffre suivant 7; c'est pourquoi je descends ce même chiffre 7 à côté, et je continue l'opération, en disant en 17, combien de fois 7? 2 fois. J'écris ce 2 à la droite du premier quotient 1 qu'a donné la première opération.

Je multiplie, comme dans la première opération, le diviseur 7 par le quotient 2 que je viens de trouver ; je porte le produit 14 sous mon dividende partiel 17, et faisant la soustraction, il me reste 3 pour la partie qui n'a pu être divisée.

A côté de ce reste 3, je descends 6, troisième chiffre du dividende, et je dis en 36 combien de fois 7? 5 fois, j'écris 5 au quotient.

Je multiplie le diviseur 7 par 5; et ayant écrit le produit 35 sous mon nouveau dividende partiel, je l'en retranche, et il me reste 1.

Enfin, à côté de ce reste 1, je descends le chiffre 9 du dividende, et je dis en 19 combien de fois 7? 2 fois; j'écris 2 au quotient.

Je multiplie le diviseur 7, par ce nouveau quotient 2, et ayant écrit le produit 14 sous mon dernier dividende partiel 19, j'ai pour reste 5.

Je trouve donc que 8769 contiennent 7, autant de fois que le marque le quotient que nous avons écrit, c'est-à-dire, 1252 fois, et qu'il reste 5.

A l'égard de ce reste, nous nous contenterons pour

le présent de dire qu'on l'écrit à côté du quotient, comme on le voit dans cet exemple, c'est-à-dire, en écrivant le diviseur au-dessous de ce reste, et séparant l'un de l'autre par un trait; et alors on prononce *cinq septième*. Nous expliquerons par la suite la nature de ces sortes de nombres.

60. Si dans la suite de l'opération, quelqu'un des dividendes partiels se trouvoit ne pas contenir le diviseur, on écriroit zéro au quotient, et omettant la multiplication, on abaisseroit tout de suite un autre chiffre à côté de ce dividende partiel, et on continueroit la division.

EXEMPLE.

Il s'agit de diviser 14464 par 8.

```
14464 | 8
 8    |-----
----- | 1808
 64
 64
-----
  064
   64
  ----
    0
```

Je prends, ici, les deux premiers chiffres du dividende, parce que le premier ne contient pas le diviseur.

Je trouve que 14 contient 8, 1 fois; j'écris 1 au quotient; je multiplie 8 par 1, et je retranche le produit 8 de 14, ce qui me donne pour reste 6, à côté duquel je descends le troisième chiffre 4 du dividende.

Je continue en disant: en 64 combien de fois 8? huit fois; j'écris 8 au quotient, et faisant la multiplication,

j'ai pour produit 64 que je retranche du dividende partiel 64, il me reste o à côté duquel j'abaisse 6, quatrième chiffre du dividende ; et comme 6 ne contient pas 8, j'écris o au quotient, et j'abaisse tout de suite, à côté de 6, le dernier chiffre du dividende qui est ici 4, pour dire en 64 combien de fois 8? il y est 8 fois: après avoir écrit 8 au quotient, je fais la multiplication, et je retranche le produit 64, et comme il ne reste rien, j'en conclus que 14464, contiennent 8, 1808 fois,

De la Division par un nombre de plusieurs chiffres.

61. Lorsque le diviseur aura plusieurs chiffres, on se conduira de la manière suivante.

Prenez sur la gauche du dividende autant de chiffres qu'il est nécessaire pour contenir le diviseur.

Cela posé, au lieu de chercher, comme cidessus, combien la partie du dividende que vous avez prise, contient votre diviseur entier, cherchez seulement combien de fois le premier chiffre de votre diviseur est compris dans le premier chiffre de votre dividende, ou dans les deux premiers, si le premier ne suffit pas; marquez ce quotient sous le diviseur comme ci-devant.

Multipliez successivement, selon la règle donnée (50), tous les chiffres de votre diviseur, par ce quotient, et portez à mesure, les chiffres du produit, sous les chiffres correspondans de votre

Digitized by Google

dividende partiel. Faites la soustraction, et à côté du reste abaissez le chiffre suivant du dividende, pour continuer l'opération de la même manière.

Nous allons éclaircir ceci par quelques exemples, et prévenir en même temps, les cas qui peuvent causer quelque embarras.

EXEMPLE I.

On propose de diviser 75347 par 53.

```
75347 | 53
53    |-----------
      | 1421 34/53
-----
 223
 212
-----
  114
  106
-----
   87
   53
-----
   34
```

Je prends seulement les deux premiers chiffres du dividende, parce qu'ils contiennent le diviseur; et au lieu de dire en 75 combien de fois 53, je cherche seulement combien les 7 dixaines de 75 contiennent les 5 dixaines de 53, c'est-à-dire, combien 7 contient 5? je trouve une fois que j'écris au quotient.

Je multiplie 53 par 1, et je porte le produit 53 sous 75: la soustraction faite, il reste 22, à côté duquel je descends le chiffre 3 du dividende, et je poursuis, en disant, pour plus de facilité, en 22 combien de fois 5 (au lieu de dire en 223 combien de fois 53); je trouve 4 fois, que j'écris au quotient.

Digitized by Google

Je multiplie successivement par 4, les deux chiffres du diviseur, et je porte le produit 212 sous mon dividende partiel 223 ; la soustraction faite, j'ai pour reste 11 ; je descends à côté de ce reste, le chiffre 4 du dividende, et je dis simplement comme ci-dessus, en 11 combien de fois 5? 2 fois ; je l'écris au quotient, et je multiplie 53 par 2, ce qui me donne 106 que j'écris sous le dividende partiel 114; faisant la soustraction, j'ai pour reste 8, à côté duquel je descends le dernier chiffre 7 ; je divise de même 87, et continuant comme ci-dessus, je trouve 1 pour quotient, et 34 pour reste que j'écris à côté du quotient, de la manière qui a été indiquée plus haut (59).

62. On devroit, à la rigueur, chercher combien de fois chaque dividende partiel contient le diviseur entier; mais comme cette recherche seroit souvent longue et pénible, on se contente, comme on vient de le voir, de chercher combien la partie la plus forte de ce dividende contient la partie la plus forte du diviseur. Le quotient qu'on trouve par cette voie, n'est pas toujours le véritable, parce qu'en prenant ce parti, on ne fait réellement qu'une estimation approchée; mais outre que cette estimation met presque toujours sur le but, et que dans les cas où elle n'y met pas, elle en écarte peu ; la multiplication qui vient ensuite, sert à redresser ce qu'il peut y avoir de défectueux dans ce jugement. En effet, si le dividende partiel contenoit réellement le diviseur, trois fois par exemple; et que par l'essai qu'on fait, on

eût trouvé qu'il le contient 4 fois, il est facile de voir qu'en faisant la multiplication par 4, on auroit un produit plus grand que le dividende, puisqu'on prendroit le diviseur plus de fois qu'il n'est réellement dans ce dividende, et par conséquent la soustraction deviendra impossible; alors on diminuera le quotient successivement d'une, deux, etc. unités, jusqu'à ce qu'on trouve un produit qu'on puisse retrancher; au contraire si on n'avoit mis que deux au quotient, le reste de la soustraction se trouveroit plus grand que le diviseur; ce qui prouveroit que le diviseur y est encore contenu, et que par conséquent le quotient est trop foible.

Au reste on acquiert en peu de temps l'usage de prévoir de combien on doit diminuer ou augmenter le quotient que donne la première épreuve.

EXEMPLE II.

On propose de diviser 189492 par 375.

189492	375
1875	505 $\frac{117}{375}$
1992	
1375	
117	

Je prends les quatre premiers chiffres du dividende, parce que les trois premiers ne contiennent pas le diviseur.

Je dis ensuite, en 18 seulement, combien de fois 3?

Digitized by

il y est réellement 6 fois ; mais en multipliant 375 par 6, j'aurais plus que mon dividende 1894 ; c'est pourquoi j'écris seulement 5 au quotient. Je multiplie 375 par 5 ; et après avoir écrit le produit sous 1894, je fais la soustraction, et j'ai pour reste 19.

J'abaisse à côté de 19, le chiffre 9 du dividende ; et comme 199 que j'ai alors, ne contient pas 375, je pose 0 au quotient, et j'abaisse à côté de 199, le chiffre 2 du dividende, ce qui me donne 1992, pour lequel je dis en 19 seulement combien de fois 3? 6 fois. Mais par la même raison que ci-dessus, je n'écris au quotient, que 5 ; et après avoir opéré comme ci-devant, j'ai pour reste 117.

63. C'est pour rendre la méthode plus facile à saisir, que nous avons prescrit d'écrire sous chaque dividende partiel, le produit qu'on trouve en multipliant le diviseur par le quotient ; mais comme le but de l'Arithmétique doit être d'abréger les opérations, nous croyons devoir faire remarquer qu'on peut se dispenser d'écrire ces produits, et faire la soustraction à mesure qu'on a multiplié chaque chiffre du diviseur. L'exemple suivant suffira pour faire entendre comment se fait cette soustraction.

EXEMPLE.

On veut diviser 756984 par 932.

756984	932
1138	$812\frac{200}{932}$
2064	
200	

Après avoir pris les quatre premiers chiffres du dividende, qui sont nécessaires pour contenir le diviseur, je trouve que 75 contient 9, 8 fois; c'est pourquoi j'écris 8 au quotient; mais au lieu de porter sous 7569 le produit de 932 par 8, je multiplie d'abord 2 par 8, ce qui me donne 16; mais comme je ne puis ôter 16 de 9, j'emprunte sur le chiffre suivant 6 une dixaine, qui jointe à 9 me donne 19, duquel ôtant 16, il me reste 3 que j'écris au-dessous.

Pour tenir compte de cette dixaine empruntée, au lieu de diminuer d'une unité le chiffre 6 sur lequel j'ai emprunté; je retiens cette unité que je vais ajouter au produit suivant; ainsi continuant la multiplication, je dis 8 fois 3 font 24, et 1 que j'ai retenu font 25; comme je ne puis ôter 25 de 6, j'emprunte sur le chiffre suivant 5 du dividende, deux dixaines, qui jointes à 6 me donnent 26, desquelles j'ôte 25, et il me reste 1 que j'écris sous 6; par-là, j'ai tenu compte de la première dixaine dont j'aurais dû diminuer 6, parce que j'ai retranché une dixaine de plus. Je tiendrai de même compte des deux dixaines que je viens d'emprunter; je continue donc, en disant 8 fois 9 font 72, et 2 que j'ai empruntés font 74, lesquels ôtés de 75, il reste 1.

J'abaisse à côté du reste 113, le chiffre 8 du dividende, et je continue de la même manière, en disant en 11 combien de fois 9? 1 fois; puis une fois 2, fait 2, qui, ôtés de 8, il reste 6; 1 fois 3 fait 3, qui ôtés de 3, il reste 0; 1 fois 9 est 9, qui ôtés de 11, il reste 2. J'abaisse le chiffre 4 à côté du reste 206, et je dis en 20 combien de fois 9? 2 fois; et faisant la multiplication, 2 fois 2 font 4, qui ôtés de 4 il reste 0; 2 fois 3 font 6, qui ôtés de 6, il reste 0; et enfin 2 fois 9 font 18, qui ôtés de 20, il reste 2.

Il

Il peut arriver dans le cours de ces divisions partielles, que le dividende contienne le diviseur plus de 9 fois; cependant on ne doit jamais mettre plus de 9 au quotient; car si on pouvoit seulement mettre 10, ce seroit une preuve que le quotient trouvé par l'opération précédente, seroit faux, puisque la dixaine qu'on trouveroit dans le quotient actuel appartiendroit à ce premier quotient.

64. Si le dividende et le diviseur étoient suivis de zéros, on pourroit en ôter à l'un et à l'autre autant qu'il y en a à la suite de celui qui en a le moins.

Par exemple, pour diviser 8000 par 400, je diviserai seulement 80 par 4; car il est évident que 80 centaines ne contiennent pas plus 4 centaines, que 80 unités ne contiennent 4 unités.

De la Division des Parties décimales.

65. Pour ne point nous arrêter à des distinctions superflues, nous réduirons l'opération de la division des décimales à cette seule règle.

Mettez à la suite de celui des deux nombres proposés, qui a le moins de décimales, un nombre de zéros suffisans pour que le nombre des décimales soit le même dans chacun; cela ne changera rien à la valeur de ce nombre (29); supprimez la

virgule dans l'un et dans l'autre, et faites l'opération comme pour les nombres entiers; il n'y aura rien à changer au quotient que vous trouverez.

EXEMPLE.

On propose de diviser 12,52 par 4,3.

J'écris................ 12,52 | 4,3

Ou plutôt............ 12,52 | 4,30

en complétant le nombre des décimales.

Supprimant la virgule, j'ai 1252 à diviser par 430; faisant l'opération.......... 1252 | 430

$$\begin{array}{r|l} 1252 & 430 \\ \hline & 2\frac{392}{430} \\ 392 & \end{array}$$

Je trouve 2 pour quotient, et 392 pour reste, c'est-à-dire que le quotient est 2 et $\frac{392}{430}$.

Mais comme l'objet qu'on se propose quand on se sert de décimales, est d'éviter les fractions ordinaires; au lieu d'écrire le reste sous la forme de fraction, comme on l'a pratiqué jusqu'ici, on continuera l'opération comme dans l'exemple suivant.

EXEMPLE.

$$\begin{array}{r|l} 1252 & 430 \\ \hline & 2{,}9116 \\ 3920 & \\ 500 & \\ 700 & \\ 2700 & \\ 120 & \end{array}$$

Après avoir trouvé le quotient, en entiers, qui est ici 2, on mettra à côté du reste 392, un zéro qui, à la vérité, rendra ce reste dix fois trop grand; on continuera de diviser par 430, et ayant trouvé qu'il faudroit mettre 9 au quotient, on l'y mettra en effet, mais après avoir marqué la place des unités entières, en mettant une virgule après le 2; par ce moyen le 9 ne marquera plus que des dixièmes : après la multiplication et la soustraction faites, on mettra à côté du reste 50, un zéro, ce qui est la même chose que si on en avoit mis d'abord deux, à côté du dividende; mais en mettant après 9, le quotient 1 qu'on trouvera, on lui donnera par-là sa véritable valeur, puisqu'alors il marque des centièmes; on continuera ainsi tant qu'on le jugera nécessaire. En s'en tenant à deux décimales, on a la valeur du quotient à moins d'un centième d'unité près; en poussant jusqu'à trois chiffres, on a le quotient à moins d'un millième près; et ainsi de suite; puisqu'on n'auroit pas pu mettre une unité de plus ou de moins, sans rendre le quotient trop fort ou trop foible.

Tous les restes de division peuvent être réduits ainsi en décimales.

66. Il reste à expliquer pourquoi la suppression de la virgule dans le dividende et dans le diviseur, ne change rien au quotient, lorsqu'on a rendu le nombre des décimales le même dans chacun de ces deux nombres : c'est ce qu'il est aisé d'appercevoir, parce que dans l'exemple ci-dessus, le dividende 12,52, et le diviseur 4,30 ne sont autre chose que 1252 centièmes et 430 centièmes, puisque les unités entières valent des

centaines de centièmes (22); or il est clair que 1252 centièmes ne contiennent pas autrement 430 centièmes, que 1252 unités ne contiennent 430 unités; donc la considération de la virgule est inutile quand on a complетté le nombre des décimales.

De la preuve de la Multiplication et de la Division.

67. On peut tirer de la définition même que nous avons donnée de chacune de ces deux opérations, le moyen d'en faire la preuve.

Puisque, dans la multiplication, on prend le multiplicande autant de fois que le multiplicateur contient d'unités, il s'ensuit que si on cherche combien de fois le produit contient le multiplicande, c'est-à-dire (58), si on divise le produit par le multiplicande, on doit trouver pour quotient le multiplicateur; et comme on peut prendre le multiplicande pour le multiplicateur, *et vice versâ;* en général, *si on divise le produit d'une multiplication, par l'un de ses facteurs, on doit trouver pour quotient l'autre facteur.*

Par exemple, ayant trouvé ci-dessus (50) que 2864 multiplié par 6 a donné 17184, je divise 17184 par 2864, je dois trouver et je trouve en effet 6 pour quotient.

68. Pareillement, puisque le quotient d'une

Digitized by Google

division marque combien de fois le dividende contient le diviseur, il s'ensuit que si on prend le diviseur autant de fois qu'il est marqué par le quotient, c'est-à-dire, si on multiplie le diviseur par le quotient, on doit reproduire le dividende lorsque la division a été faite sans reste ; et que dans le cas où il y a un reste, si on multiplie le diviseur par le quotient, et qu'au produit on ajoute le reste de la division, on doit reproduire le dividende.

Par exemple, nous avons trouvé ci-dessus (62) que 189492 divisé par 375, donnoit 505 pour quotient et 117 pour reste ; en multipliant 375 par 505, on trouve 189375 ; ajoutant le reste 117, on retrouve le dividende 189492.

Ainsi la multiplication et la division peuvent se servir de preuve réciproquement.

Sur quelques usages de la Règle précédente.

69. La division sert, non-seulement à trouver combien de fois un nombre en contient un autre, mais encore à partager un nombre en parties égales. Prendre la moitié, le tiers, le quart, le cinquième, le vingtième, le trentième, etc. d'un nombre; c'est diviser ce nombre par 2, 3, 4, 5, 20, 30, etc. ou le partager en 2, 3,

Digitized by Google

4, 5, 20, 30, etc. parties égales, pour prendre une de ces parties.

Entre plusieurs exemples de cet usage de la division, nous choisissons le cas où l'on veut trouver une quantité moyenne entre plusieurs autres. Supposons qu'ayant fait dix épreuves d'un même mortier, on ait eu les dix portées suivantes ;

COUPS.	PORTÉES.
1.	. . . . 1231 toises.
2.	. . . . 1192.
3.	. . . . 1223.
4.	. . . . 1200.
5.	. . . . 1227.
6.	. . . . 1144.
7.	. . . . 1186.
8.	. . . . 1219.
9.	. . . . 1229.
10.	. . . . 1164.
Somme des Portées. . . . . 12015.	
Portée moyenne. . . . . $1201\frac{5}{10}$.	

Ce qu'on entend par quantité moyenne ; c'est ce que seroit chaque quantité, si, leur valeur totale restant la même, elles étoient toutes égales. Or il est claire, que si elles étoient toutes égales, pour avoir la valeur de chacune, il faudroit partager leur totalité en autant de parties qu'il y a de quantités. Il faut donc ici partager la somme 12015 en dix parties ; c'est-à-dire la diviser

par 10; le quotient $1201\frac{5}{10}$ est la quantité, ou la portée moyenne, que l'on appelle ainsi, parce qu'elle tient une espèce de milieu entre toutes les autres.

Dans les calculs ordinaires de la pratique, on rejette la fraction, quand elle est au-dessous d'une demi-unité; et lorsqu'au contraire, elle est au-dessus, ou qu'elle vaut cette demi-unité, on compte une unité de plus.

70. La division sert encore à convertir les unités d'une certaine espèce, en unités d'une espèce supérieure; par exemple, un certain nombre de deniers, en sous; et ceux-ci en livres.

Pour réduire 5864 deniers en sous, on remarquera que puisqu'il faut 12 deniers pour faire un sou, autant de fois il y aura 12 deniers dans 5864 deniers, autant il y aura de sous; il faut donc diviser par 12; on trouvera 488^s et 8^d de reste. Pour réduire en livres, les 488^s, on divisera 488 par 20, puisqu'il faut 20^s pour faire la livre, et on aura, en total, 24 livres 8 sous 8 deniers.

71. A l'occasion de cette division par 20, remarquons que quand on a à diviser par un nombre suivi de zéros, on peut abréger l'opération, en séparant sur la droite du dividende, autant de chiffres qu'il y a de zéros; on divise la partie qui reste à gauche, par les chiffres significatifs du diviseur; s'il y a un reste, on écrit à sa suite, les chiffres qu'on a séparés; ce qui donne le reste total.

Par exemple, pour diviser 5834 par 20, je sépare le chiffre 4, et je divise par 2 la partie 583; j'ai pour quo-

tient 291, et 1 pour reste; j'écris à côté de ce reste 1, le chiffre séparé 4, ce qui me donne 14 pour reste total; en sorte que le quotient est 291 $\frac{14}{20}$.

72. *On voit par-là, que lorsqu'il s'agit de prendre le vingtième d'un nombre de livres proposé, cela se réduit à séparer le dernier chiffre sur la droite, compter ce dernier chiffre pour des sous, prendre la moitié des autres chiffres et la compter pour des livres; si en prenant cette moitié il reste une unité, on la comptera pour une dixaine de sous qu'on placera à la gauche du chiffre qu'on a séparé d'abord.*

Par exemple, si on veut avoir le vingtième de 54672 livres, je sépare le dernier chiffre 2, que je compte pour 2 sous, parce que la vingtième partie de 2# est 2 sous; je prends la moitié de 5467# qui est 2733#; et comme il me reste 1, j'ai 2733# 12 sous pour le vingtième demandé: on porte la dixaine restante, aux dixaines de sous, parce que le vingtième d'une dixaine de livres, est une dixaine de sous.

S'il s'agissoit du dixième, on prendroit tous les chiffres, excepté le dernier sur la droite, pour autant de livres: puis doublant ce dernier, on prendroit ce double pour des sous, parce que la dixième partie d'une livre vaut 2 sous.

Des Fractions.

73. Les fractions considérées arithmétiquement, sont des nombres par lesquels on exprime les quantités plus petites que l'unité.

74. Pour se faire une idée nette des fractions,

Digitized by Google

il faut concevoir que la quantité qu'on a prise d'abord pour unité, est elle-même composée d'un certain nombre de parties ou d'unités plus petites; comme on conçoit, par exemple, que la livre est composée de vingt parties, ou de vingt unités plus petites, qu'on appelle sous.

Une, ou plusieurs de ces parties, forment ce qu'on appelle une *fraction de l'unité;* mais on donne aussi ce nom aux nombres qui les représentent.

75. Une fraction peut être exprimée en nombres, de deux manières qui sont chacune en usage.

La première manière consiste à représenter, comme les nombres entiers, les parties de l'unité que contient la quantité dont il s'agit; mais alors, on donne un nom particulier à ces parties.

Ainsi, pour marquer 7 parties dont on en conçoit 20 dans la livre, on emploieroit le chiffre 7, mais on prononceroit 7 sous, et on écriroit 7^{s} : cette manière de marquer les parties de l'unité, a lieu dans les nombres complexes dont nous parlerons par la suite.

76. Mais comme il faudroit un signe particulier pour chaque division qu'on pourroit faire de l'unité, on évite cette multiplicité de signes, en marquant une fraction, par deux nombres placés l'un au-dessous de l'autre, et séparés par un trait.

Ainsi, pour marquer les 7 parties dont il vient d'être question, on écrit $\frac{7}{20}$; c'est-à-dire, qu'en général, on écrit d'abord le nombre qui marque combien la quantité dont il s'agit contient de parties de l'unité; et on écrit au-dessous de ce nombre, celui qui marque combien on conçoit de ces parties dans l'unité.

Et pour énoncer une fraction, on énonce d'abord le nombre supérieur (qui s'appelle le *numérateur*); ensuite le nombre inférieur (qui s'appelle le *dénominateur*); mais on ajoute au nom de celui-ci, la terminaison *ième*.

Par exemple, pour énoncer $\frac{7}{20}$, on prononcera *sept vingtièmes*. Pour énoncer $\frac{4}{5}$, on prononcera *quatre cinquièmes*: et par cette expression *quatre cinquièmes*, on doit entendre quatre parties dont il en faudroit cinq pour composer l'unité.

Il faut seulement excepter de la terminaison générale, les fractions dont le dénominateur est 2, ou 3, ou 4, qui se prononcent, *moitiés* ou *demis*, *tiers*, *quarts*. Ainsi ces fractions $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, se prononceroient *un demi*, *deux tiers*, *trois quarts*.

77. Le numérateur marque donc combien la quantité représentée par la fraction, contient de parties de l'unité; et le dénominateur fait connoître de quelle valeur sont ces parties, en marquant combien il en faut pour composer l'unité. On lui donne le nom de *dénominateur*, parce que

Digitized by Google

c'est lui, en effet, qui donne le nom à la fraction, et qui fait que dans ces deux fractions, par exemple, $\frac{3}{5}$ et $\frac{2}{7}$, les parties de la première s'appellent des *cinquièmes*, et les parties de la seconde des *septièmes*.

78. Le numérateur et le dénominateur s'appellent aussi, d'un nom commun, les deux *termes de la fraction*.

Des Entiers considérés sous la forme de Fractions.

79. Les opérations qu'on fait sur les fractions, conduisent souvent à des résultats fractionnaires, dont le numérateur est plus grand que le dénominateur, par exemple, à des résultats tels que $\frac{9}{6}$, $\frac{27}{5}$, etc.

Ces sortes d'expressions ne sont pas des fractions proprement dites, mais ce sont des nombres entiers joints à des fractions.

80. Pour extraire les entiers qui s'y trouvent renfermés, il faut diviser le numérateur, par le dénominateur. Le quotient marquera les entiers; le reste de la division sera le numérateur de la fraction qui accompagne ces entiers.

Ainsi $\frac{27}{5}$, donneront 5 $\frac{2}{5}$, c'est-à-dire, cinq entiers et deux cinquièmes.

En effet, dans l'expression $\frac{27}{5}$, le denominateur 5, fait connoître que l'unité est composée de 5 parties; donc autant de fois il y aura 5 dans 27, autant il y aura d'unités entières dans la valeur de la fraction $\frac{27}{5}$.

81. Les multiplications et les divisions des nombres entiers joints aux fractions, exigent, du moins pour la facilité, qu'on convertisse ces entiers en fraction.

On fait cette conversion en multipliant le nombre entier par le dénominateur de la fraction en laquelle on veut réduire cet entier.

Par exemple, si on veut convertir 8 entiers en cinquièmes, on multipliera 8 par 5, et on aura $\frac{40}{5}$. En effet, lorsqu'on veut convertir 8, en cinquièmes, on regarde l'unité comme composée de 5 parties, les 8 unités, en contiendront donc 40: pareillement $7\frac{4}{9}$ convertis en neuvièmes, feront $\frac{67}{9}$.

Des changemens qu'on peut faire subir aux termes d'une Fraction, sans changer la valeur de cette Fraction.

82. Il est visible que plus on concevra de parties dans l'unité, et plus il faudra de ces parties pour composer une même quantité.

Donc, on peut rendre le dénominateur d'une fraction, double, triple, quadruple, etc. sans

Digitized by Google

rien changer à la valeur de la fraction ; pourvu qu'en même temps, on rende aussi le numérateur, double, triple, quadruple, etc.

On peut donc dire, en général, *qu'une fraction ne change point de valeur, quand on multiplie ses deux termes par un même nombre.*

Ainsi, $\frac{3}{4}$ est la même chose que $\frac{6}{8}$; $\frac{1}{2}$, la même chose que $\frac{2}{4}$, que $\frac{3}{6}$, que $\frac{5}{10}$, etc.

83. Par un raisonnement semblable, on voit que moins il y aura de parties dans l'unité, moins il faudra de ces parties pour former une même quantité ; que par conséquent, on peut, sans changer une fraction, rendre son dénominateur 2, 3, 4, etc. fois plus petit, pourvu qu'en même temps, on rende son numérateur 2, 3, 4, etc. fois plus petit ; et en général, *une fraction ne change point de valeur, quand on divise ses deux termes, par un même nombre.*

Pour voir distinctement la vérité de ces deux propositions, il suffit de se rappeler ce que c'est que le dénominateur, et ce que c'est que le numérateur d'une fraction.

Remarquons donc, que multiplier ou diviser les deux termes de la fraction par un même nombre, n'est point multiplier ou diviser la fraction, puisque, comme nous venons de le dire,

elle ne change point de valeur par ces opérations.

Les deux principes que nous venons de poser, sont la base des deux réductions suivantes, qui sont d'un très-grand usage.

Réductions des Fractions à un même Dénominateur.

84. 1°. Pour réduire deux fractions à un même dénominateur, multipliez les deux termes de la première, chacun par le dénominateur de la seconde; et les deux termes de la seconde, chacun par le dénominateur de la première.

Par exemple, pour réduire à un même dénominateur, les deux fractions $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$; je multiplie 2 et 3, qui sont les deux termes de la première fraction, chacun, par 4, dénominateur de la seconde, et j'ai $\frac{8}{12}$ qui (81) est de même valeur que $\frac{2}{3}$.

Je multiplie, de même, les deux termes 3 et 4, de la seconde fraction, chacun par 3, dénominateur de la première; et j'ai $\frac{9}{12}$ qui est de même valeur que $\frac{3}{4}$; en sorte que les fractions $\frac{2}{3}$ et $\frac{3}{4}$ sont changées en $\frac{8}{12}$ et $\frac{9}{12}$, qui sont respectivement de même valeur que celles-là, et qui ont le même dénominateur entr'elles.

Il est aisé de voir, que par cette méthode, le dénominateur sera toujours le même pour chacune des deux nouvelles fractions; puisque dans chaque

Digitized by Google

opération, le nouveau dénominateur est formé de la multiplication des deux dénominateurs primitifs.

85. 2°. Si on a plus de deux fractions, on les réduira toutes au même dénominateur, en multipliant les deux termes de chacune, par le produit résultant de la multiplication des dénominateurs des autres fractions.

Par exemple, pour réduire à un même dénominateur, les quatre fractions $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{5}{7}$; je multiplierai les deux termes 2 et 3 de la première, par le produit des trois dénominateurs 4, 5, 7, des autres fractions, produit que je trouve en disant : 4 fois 5, font 20; puis 7 fois 20, font 140; je multiplie donc 2 et 3 chacun par 140, et j'ai $\frac{280}{420}$, qui est de même valeur que $\frac{2}{3}$ (81).

Je multiplie pareillement, les deux termes 3 et 4 de la seconde fraction, par le produit de 3, 5, 7; produit que je forme en disant : 3 fois 5 font 15; puis 7 fois 15, font 105 : je multiplie donc 3 et 4, chacun, par 105; ce qui me donne $\frac{315}{420}$, fraction de même valeur que $\frac{3}{4}$.

Passant à la troisième fraction, je multiplie ses deux termes 4 et 5, chacun par 84, produit des trois dénominateurs 3, 4 et 7; et j'ai $\frac{336}{420}$, au lieu de $\frac{4}{5}$.

Enfin, pour la quatrième, je multiplierai 5 et 7, chacun par le produit 60 des dénominateurs 3, 4, 5 des trois premières fractions, et j'aurai $\frac{300}{420}$, au lieu de $\frac{5}{7}$, en sorte que les quatre fractions $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{5}{7}$, sont changées en $\frac{280}{420}$, $\frac{315}{420}$, $\frac{336}{420}$, $\frac{300}{420}$, moins simples, à la vérité, que celles-là, mais de même valeur qu'elles, et plus suscep-

Digitized by Google

tibles, par leur dénominateur commun, des opérations de l'addition et de la soustraction.

Remarquons que le dénominateur de chaque nouvelle fraction, étant formé du produit de tous les dénominateurs primitifs, ce nouveau dénominateur ne peut manquer d'être le même pour chaque fraction.

86. Cette règle peut être présentée sous un autre aspect, qui conduit à donner une expression plus simple, des fractions réduites à un dénominateur commun, lorsque leurs dénominateurs actuels sont multiples les uns des autres, ou lorsqu'ils ont des diviseurs communs.

On prendra pour dénominateur commun, le plus petit nombre qui soit divisible exactement, par chacun des dénominateurs des fractions proposées : et pour avoir le numérateur qui, pour chaque fraction, conviendra à ce nouveau dénominateur, on multipliera le numérateur actuel de cette fraction, par le nombre de fois que son dénominateur actuel est contenu dans le dénominateur commun.

Par exemple, si j'avois les fractions $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{7}{12}$, à réduire à un même dénominateur ; je prendrois pour dénominateur commun 24 qui est le plus petit nombre, qui soit exactement divisible par tous ces denominateurs : et comme 24 contient les dénominateurs 3, 4, 6, 8, 12, respectivement, autant de fois qu'il est exprimé par les nombres

nombres suivans 8, 6, 4, 3, 2, j'écris, comme on le voit ici, ces nombres, chacun sous la fraction correspondante.

$$\frac{2}{3} \quad \frac{3}{4} \quad \frac{5}{6} \quad \frac{3}{8} \quad \frac{7}{12}$$

$$8 \quad 6 \quad 4 \quad 3 \quad 2$$

En multipliant chaque numérateur par le terme correspondant de la suite inférieure, j'ai

$$\frac{16}{24} \quad \frac{18}{24} \quad \frac{20}{24} \quad \frac{9}{24} \quad \frac{14}{24}$$

pour les fractions réduites au dénominateur commun le plus simple.

Réduction des fractions à leur plus simple expression.

87. Une fraction est d'autant plus simple, que ses deux termes sont de plus petits nombres. Il est souvent possible d'amener une fraction proposée, à être exprimée par de moindres nombres, et cela lorsque son numérateur et son dénominateur peuvent être divisés par un même nombre; comme cette opération n'en change point la valeur (81), c'est une simplification qu'on ne doit pas négliger.

Voici le procédé qu'il faudra suivre.

88. On divisera le numérateur et le dénominateur, chacun par 2; et on répétera cette division tant qu'elle pourra être faite exactement.

On divisera, ensuite, les deux termes par 3, et on continuera de diviser l'un et l'autre par 3, tant que cela pourra être fait.

On fera la même chose, successivement, avec les nombres 5, 7, 11, 13, 17, etc. c'est-à-dire, avec les nombres qui n'ont d'autre diviseur qu'eux-mêmes, ou l'unité, et qu'on appelle *nombres premiers.*

Ainsi, la seule difficulté qu'il y ait, est de savoir quand est-ce qu'on pourra diviser par 2, 3, 5, etc.

On pourra, dans cette recherche, s'aider des principes suivans.

Tout nombre qui finit par un chiffre pair, est divisible par 2.

Tout nombre dont la somme des chiffres ajoutés ensemble, comme s'ils étoient des unités simples, fera 3 ou un *multiple* de 3, c'est-à-dire, un nombre exact de fois 3, sera divisible par 3.

Par exemple, 54231 est divisible par 3, parce que ses chiffres 5, 4, 2, 3, 1, font 15, qui est 5 fois 3.

La même chose a lieu pour le nombre 9, si les chiffres, ajoutés ensemble, font 9, ou un multiple de 9.

Tout nombre terminé par un 5, ou par un zéro est divisible par 5.

A l'égard du nombre 7 et des suivans, quoiqu'il soit facile de trouver de pareilles règles, comme l'examen qu'elles supposent est aussi long que la division, il faudra essayer la division.

Digitized by Google

Proposons-nous, pour exemple, de réduire la fraction $\frac{2016}{5796}$. Je divise les deux termes par 2, parce que les deux derniers chiffres de chacun, sont pairs; et j'ai $\frac{1008}{2898}$. Je divise encore par 2, et j'ai $\frac{504}{1449}$. Ce qui a été dit ci-dessus, m'apprend que je puis diviser par 3; je divise en effet, et j'ai $\frac{168}{483}$; je divise encore par 3, ce qui me donne $\frac{56}{161}$; enfin j'essaye de diviser par 7; la division réussit et me donne $\frac{8}{23}$.

89. *De tous les moyens qu'on peut employer pour réduire une fraction à une expression plus simple, le plus direct, est celui de diviser les deux termes par le plus grand diviseur commun qu'ils puissent avoir : voici la règle pour trouver ce plus grand diviseur commun.*

Divisez le plus grand des deux termes par le plus petit; s'il n'y a point de reste, c'est le plus petit terme qui est le plus grand diviseur commun.

S'il y a un reste, divisez ce plus petit terme, par ce reste; et si la division se fait exactement, c'est ce premier reste qui est le plus grand diviseur commun.

Si cette seconde division donne un reste; divisez le premier reste, par le second; et continuez toujours de diviser le reste précédent, par le dernier reste, jusqu'à ce que vous arriviez à une division exacte. Alors, le dernier diviseur que vous aurez employé, sera le plus grand diviseur des deux termes de la fraction.

Si le dernier diviseur se trouve être l'unité, c'est une preuve que la fraction ne peut être réduite.

Prenons pour exemple la fraction $\frac{3760}{9024}$.

Je divise 9024 par 3760 : j'ai pour quotient 2, et pour reste 1504.

Je divise 3760 par 1504; j'ai pour quotient 2, et pour reste 752.

Je divise le premier reste 1504, par le second reste 752 : la division réussit, et j'en concluds que 752 peut diviser les deux

termes de la fraction $\frac{3760}{9024}$, et la réduire à sa plus simple expression, qu'on trouve, en faisant l'opération, être de $\frac{5}{12}$.

En effet, on a trouvé que 752 divise 1504; il doit donc diviser 3760 qu'on a vu être composé de deux fois 1504, et de 752; on voit de même qu'il doit diviser 9024, puisque 9024 est composé de deux fois 3760, et de 1504.

Il est, d'ailleurs, également facile de voir que 752 est le plus grand commun diviseur des deux termes 9024 et 3760; car tout diviseur commun de ces deux nombres, doit diviser leur différence 1504; pareillement tout diviseur commun de 3760 et 1504, doit diviser leur différence 752: or 752 ne peut être divisé par un nombre plus grand que lui-même: le plus grand commun diviseur de 1504 et de 752, est donc 752. Et puisque 3760 est composé de 2 fois 1504 plus 752, il ne peut donc avoir, avec 1504, de commun diviseur plus grand que 752; et un raisonnement semblable, fait voir qu'entre 9024 et 3760, il n'y en aura pas de plus grand que 752.

La raison pour laquelle nous avons prescrit de ne tenter la division que par les nombres premiers 2, 3, 5, 7, etc. c'est qu'aprés avoir épuisé la division par 2, par exemple, il est inutile de tenter de diviser par 4; puisque si celle-ci pouvoit réussir, à plus forte raison la division par 2, auroit-elle pu encore être faite.

Différentes manières dont on peut envisager une fraction, et conséquences qu'on peut en tirer.

90. L'idée que nous avons donnée jusqu'ici, d'une fraction, est que le dénominateur repré-

Digitized by Google

sente de combien de parties l'unité est composée ; et le numérateur, combien il y a de ces parties dans la quantité que la fraction exprime.

On peut encore envisager une fraction, sous un autre point de vue : on peut considérer le numérateur, comme représentant une certaine quantité qui doit être divisée en autant de parties qu'il y a d'unité dans le dénominateur.

Par exemple, dans $\frac{4}{5}$, on peut considérer 4, comme représentant quatre choses quelconques, 4 livres, par exemple, qu'il s'agit de partager en cinq parties ; car il est évident que c'est la même chose de partager 4 livres en cinq parties, pour prendre une de ces parties, ou de partager une livre en cinq parties, pour en prendre 4.

91. On peut donc considérer le numérateur d'une fraction, comme un dividende, et le dénominateur, comme un diviseur. On voit par-là ce que signifient les restes de division, mis sous la forme que nous leur avons donnée (60).

92. Il suit de-là, 1°. qu'un entier peut toujours être mis sous la forme d'une fraction, en faisant de cet entier, le numérateur ; et lui donnant l'unité pour dénominateur ; ainsi 8 ou $\frac{8}{1}$, sont la même chose ; 5 ou $\frac{5}{1}$ sont la même chose.

93. 2°. Que pour convertir une fraction quelconque, en décimales ; il n'y a qu'à considérer le numérateur, comme un reste de division où

le dénominateur étoit diviseur, et opérer par conséquent, comme il a été dit (*page* 50), en observant de mettre d'abord un zéro, au quotient, pour tenir la place des unités; c'est ainsi qu'on trouvera que $\frac{3}{5}$ valent, en décimales, 0,6; que $\frac{5}{9}$, valent 0,555, etc. que $\frac{1}{25}$, vaut 0,04, et ainsi de suite.

De l'Addition des Fractions.

94. Si les fractions ont le même dénominateur, on ajoutera tous les numérateurs, et on donnera à la somme le dénominateur commun de ces fractions.

Ainsi pour ajouter $\frac{2}{7}$, $\frac{3}{7}$, $\frac{5}{7}$, j'ajoute les numérateurs 2, 3 et 5, et j'ai par conséquent $\frac{10}{7}$, que je réduits à $1\frac{3}{7}$ (80).

95. Si les fractions n'ont pas le même dénominateur, on commencera par les y réduire par ce qui a été enseigné (83 et suiv.); après quoi, on ajoutera ces nouvelles fractions, de la manière qui vient d'être prescrite.

Ainsi, si on propose d'ajouter $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{5}$; je change ces trois fractions, en ces trois autres $\frac{45}{60}$, $\frac{40}{60}$, $\frac{48}{60}$, dont la somme est $\frac{133}{60}$, qui se réduit à $2\frac{13}{60}$ (80).

De la soustraction des Fractions.

96. Si les deux fractions proposées ont le

Digitized by Google

même dénominateur, on retranchera le numérateur de l'une, du numérateur de l'autre ; et on donnera au reste, le dénominateur commun de ces deux fractions.

S'il est question de retrancher $\frac{5}{9}$ de $\frac{8}{9}$, le reste sera $\frac{3}{9}$ qui se réduit à $\frac{1}{3}$ (87).

Si de $9\frac{5}{8}$, on vouloit retrancher $4\frac{7}{8}$; comme on ne peut ôter $\frac{7}{8}$ de $\frac{5}{8}$, on emprunteroit sur 9, une unité, laquelle réduite en huitièmes, et ajoutée à $\frac{5}{8}$, feroit $\frac{13}{8}$, desquels ôtant $\frac{7}{8}$, il resteroit $\frac{6}{8}$; ôtant ensuite 4, de 8 qui reste après l'emprunt, il resteroit en tout $4\frac{6}{8}$ ou $4\frac{3}{4}$.

97. Si les fractions n'ont pas le même dénominateur, on les y réduira (83 et suiv.) ; après quoi, on fera la soustraction comme il vient d'être dit.

Ainsi, pour ôter $\frac{2}{3}$ de $\frac{3}{4}$; je change ces fractions en $\frac{8}{12}$ et $\frac{9}{12}$; et retranchant 8, de 9, il me reste $\frac{1}{12}$.

De la multiplication des Fractions.

98. Pour multiplier une fraction, par une autre fraction ; il faut multiplier le numérateur de l'une par le numérateur de l'autre ; et le dénominateur, par le dénominateur.

Par exemple, pour multiplier $\frac{2}{3}$, par $\frac{4}{5}$; on multipliera 2, par 4 ; ce qui donnera 8 pour numérateur ; multipliant, pareillement, 3 par 5, on aura 15 pour dénominateur ; et par conséquent $\frac{8}{15}$, pour le produit.

Pour sentir la raison de cette règle ; il faut se rappeler que, multiplier un nombre par un autre, c'est prendre le multiplicande autant de fois que le multiplicateur contient d'unités. Ainsi, multiplier $\frac{2}{3}$ par $\frac{4}{5}$, c'est prendre $\frac{4}{5}$ de fois la fraction $\frac{2}{3}$; ou plus exactement, c'est prendre 4 fois la cinquième partie de $\frac{2}{3}$: or en multipliant le dénominateur 3, par 5, on change les tiers en quinzièmes, c'est-à-dire, en parties 5 fois plus petites ; et en multipliant le numérateur 2 par 4, on prend ces nouvelles parties quatre fois ; on prend donc quatre fois la cinquième partie de $\frac{2}{3}$: on multiplie donc, en effet, $\frac{2}{3}$ par $\frac{4}{5}$.

99. Si on avoit un entier, à multiplier par une fraction ; ou une fraction, à multiplier par un entier ; on mettroit l'entier sous la forme de fraction, en lui donnant l'unité pour dénominateur.

Par exemple, si j'ai 9 à multiplier par $\frac{4}{7}$; cela se réduit à multiplier $\frac{9}{1}$ par $\frac{4}{7}$, ce qui, selon la règle qu'on vient de donner, produit $\frac{36}{7}$ qui se réduisent à $5\frac{1}{7}$.

100. S'il y avoit des entiers joints aux fractions ; il faudroit, avant de faire la multiplication, réduire ces entiers, chacun en fraction de même espèce que celle qui l'accompagne.

Par exemple, si on a $12\frac{3}{5}$, à multiplier par $9\frac{3}{4}$; je change (80) le multiplicande en $\frac{63}{5}$, et le multiplicateur

Digitized by Google

en $\frac{39}{4}$; et je multiplie $\frac{63}{5}$ par $\frac{39}{4}$, selon la règle ci-dessus (97); ce qui me donne $\frac{2457}{20}$, qui valent $122\frac{17}{20}$.

101. On pourroit, encore, faire cette même opération, en multipliant l'entier et la fraction du multiplicande, par l'entier du multiplicateur; puis, par la fraction du même multiplicateur, en cette manière......

	$12\frac{3}{5}$		
	$9\frac{3}{4}$		
Produit de 12 par 9........	108		
de $\frac{3}{5}$ par 9........	$5\frac{2}{5}$	.... ou	$\frac{8}{20}$
de 12 par $\frac{3}{4}$........	9		
de $\frac{3}{5}$ par $\frac{3}{4}$........	$0\frac{9}{20}$	.... ou	$\frac{9}{20}$
	$122\frac{17}{20}$		

Mais cette manière d'opérer est, en général, moins simple que la première.

Division des Fractions.

102. Pour diviser une fraction, par une autre fraction; il faut renverser les deux termes de la fraction qui sert de diviseur, et multiplier la fraction dividende, par cette fraction ainsi renversée.

Par exemple, pour diviser $\frac{4}{5}$ par $\frac{2}{3}$; je renverse la fraction $\frac{2}{3}$, ce qui me donne $\frac{3}{2}$; je multiplie $\frac{4}{5}$ par $\frac{3}{2}$, selon la règle donnée (97); et j'ai $\frac{12}{10}$ ou $1\frac{2}{10}$, pour le quotient de $\frac{4}{5}$ divisé par $\frac{2}{3}$.

Poûr appercevoir la raison de cette règle ; il faut observer, que diviser $\frac{4}{5}$ par $\frac{2}{3}$, c'est chercher combien de fois $\frac{4}{5}$ contiennent $\frac{2}{3}$: or il est facile de voir que, puisque le diviseur est deux tiers, il sera contenu dans le dividende, trois fois autant que s'il étoit composé de pareil nombre d'entiers ; donc il faut diviser d'abord par 2, et multiplier ensuite par 3 ; ce qui n'est autre chose que de multiplier par $\frac{3}{2}$, qui est la fraction diviseur renversée.

103. Si on avoit une fraction, à diviser par un entier ; ou un entier, à diviser par une fraction ; on commenceroit par mettre l'entier, sous la forme de fraction, en lui donnant l'unité pour dénominateur.

Par exemple, si on a 12 à diviser par $\frac{5}{7}$; on réduira l'opération à diviser $\frac{12}{1}$ par $\frac{5}{7}$, ce qui, selon la règle qu'on vient de donner, se réduit à multiplier $\frac{12}{1}$ par $\frac{7}{5}$, et donne $\frac{84}{5}$ ou 16 $\frac{4}{5}$.

104. S'il y avoit des entiers joints aux fractions, on réduiroit ces entiers, chacun, en fraction de même espèce que celle qui l'accompagne.

Par exemple, si on avoit 54 $\frac{3}{5}$; à diviser par 12 $\frac{2}{3}$; on changeroit le dividende, en $\frac{273}{5}$; et le diviseur, en $\frac{38}{3}$; et l'opération seroit réduite à diviser $\frac{273}{5}$ par $\frac{38}{3}$; c'est-à-dire (101), à multiplier $\frac{273}{5}$ par $\frac{3}{38}$; ce qui donneroit $\frac{819}{190}$ ou 4 $\frac{59}{190}$.

Digitized by Google

Quelques applications des règles précédentes.

105. Après ce que nous avons dit (89 et suiv.), il est aisé de voir comment on peut évaluer une fraction.

Qu'on demande, par exemple, ce que valent les $\frac{5}{7}$ d'une livre. Puisque les $\frac{5}{7}$ d'une livre sont la même chose que le septième de 5 livres, je réduis les 5 livres en sous, et je divise les 100 sous qu'elles me donnent, par 7, ce qui me donne 14 sous pour quotient, et 2 sous de reste; je réduis ces 2 sous en deniers, et je divise 24 deniers par 7; j'ai 3 deniers $\frac{3}{7}$: ainsi, les $\frac{5}{7}$ d'une livre, sont 14 sous 3 deniers et $\frac{3}{7}$ de denier.

Si on demandoit les $\frac{5}{7}$ de 24 livres, il est visible qu'on pourroit d'abord prendre, comme nous venons de le faire, les $\frac{5}{7}$ d'une livre, et multiplier ensuite, par 24, ce qu'auroit donné cette opération; mais il est plus commode de multiplier d'abord $\frac{5}{7}$ par 24 livres, ce qui (98) donne $\frac{120}{7}$ livres, et d'évaluer ensuite cette dernière fraction qu'on trouvera valoir 17 livres 2 sous 10 deniers $\frac{2}{7}$.

106. On a souvent besoin de savoir ce que produisent les 4 deniers, ou les 6 deniers pour livre, d'une somme proposée.

Pour les 4 deniers: on séparera le dernier chiffre du nombre des livres de la somme proposée; et on prendra le sixième des autres, que l'on comptera pour des livres. On joindra le reste, s'il y en a, au chiffre séparé; on en prendra le $\frac{1}{3}$, qui donnera les sous et deniers.

Digitized by Google

Si dans la somme proposée, il entre des sous, on en prendra le cinquième que l'on comptera pour des deniers.

EXEMPLE.

On demande les quatre deniers pour livres de la somme de..............	3433#	10^s	0^d
Le sixième de 343, est............	57.	0.	0
Il reste 1 qui joint, comme dixaine, au chiffre séparé 3, donne 13, dont le tiers est..........................	0.	4.	4
Enfin le cinquième de 10 sous, considérés comme deniers, est............	0.	0.	2
	57.	4.	6

La raison de cette opération, est fondée sur ce que les 4 deniers pour livre sont les $\frac{4}{240}$ ou le $\frac{1}{60}$ de la livre. Il faut donc diviser par 60, ce qui (71) se réduit à ce que nous prescrivons : quant au reste, il faudrait le réduire en sous, en multipliant par 20, puis diviser par 60; ce qui revient à prendre le tiers. On voit de même, que pour le 60^e. des sous de la somme proposée, il faudroit réduire ces sous en deniers, en les multipliant par 12, puis diviser par 60; ce qui revient à multiplier par $\frac{12}{60}$ ou $\frac{1}{5}$, à prendre le $\frac{1}{5}$; et s'il y avoit des deniers dans la somme proposée, on les négligeroit, parce que le 60^e. de ces deniers ne donneroit pas un denier.

Pour prendre les six deniers pour livre; on voit, en raisonnant de même, qu'il faut séparer le dernier chiffre des livres, prendre le quart des autres, que l'on comptera pour des livres, puis joignant le reste, au chiffre séparé, prendre la moitié, qui donnera les sous et deniers.

S'il y a des sous dans la somme proposée, on en prendra les $\frac{3}{10}$, que l'on comptera pour des deniers.

Digitized by Google

Quant aux deniers de la somme proposée, on les rejettera.

EXEMPLE.

On demande les six deniers pour livre de la somme de........................	1387ᵗᵗ	13ˢ	4ᵈ
Le quart de 138, est................	34.	0.	0
Il reste 2, qui mis à côté du chiffre séparé 7, font 27, dont la moitié est.....	0.	13.	6
Les $\frac{3}{10}$ de 13 sous, considérés comme deniers, sont........................	0.	0.	$3\frac{9}{10}$
TOTAL...............	34.	13.	10

107. Les fractions décimales n'ayant point de dénominateur, sont encore plus faciles à évaluer.

Si on demande, par exemple, combien valent 0,532 de toise; comme la toise est de six pieds, je multiplierai 0,532 par 6, ce qui me donnera 3,192 pieds, c'est-à-dire $3^{pi.}$ et 0,192 de pied; multipliant cette dernière fraction par 12 pour l'évaluer en pouces, on aura 2,304 pouces, c'est-à-dire, $2^{po.}$ et 0,304 de pouce; enfin multipliant celles-ci par 12 pour réduire en lignes, on aura 3,648 lignes, ou $3^{l.}$ et 0,648 de ligne; c'est-à-dire que la valeur de la fraction 0,532 de toise, sera $3^{pi.}$ $2^{po.}$ $3^{l.}$ et 0,648 de ligne.

108. Réciproquement, pour convertir les sous-espèces d'un nombre complexe proposé, en parties décimales de l'unité principale; il faut, à commencer par les unités de la plus basse espèce, diviser successivement, par le nombre qui marque combien de fois, celles-ci sont contenues dans l'espèce immédiatement supérieure.

Digitized by Google

Ainsi, dans l'exemple précédent, si je voulois ramener $0^{t.}\ 3^{pi.}\ 2^{po}\ 3^{li},648$ à des parties décimales de la toise, je diviserois $3^{l.},648$ par 12 ; ce qui me donneroit $0^{po.},304$; j'aurois donc $0^{t.}\ 3^{pi.}\ 2^{po.},304$; divisant, maintenant $2^{po.},304$ par 12, j'aurois $0^{pi.},192$; et en total, $0^{t.}\ 3^{pi.},192$; enfin divisant celui-ci par 6, j'aurois $0^{t.},532$.

Des Fractions de Fractions.

109. L'évaluation des fractions, nous conduit naturellement à parler *des Fractions de fractions :* on appelle ainsi une suite de fractions séparées les unes des autres par l'article *de* ; par exemple, $\frac{2}{3}$ *de* $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{3}$ *des* $\frac{3}{4}$ *de* $\frac{5}{6}$, etc. sont des fractions de fractions. On les réduit à une seule fraction, en multipliant tous les numérateurs entr'eux, et tous les dénominateurs entr'eux ; en sorte que la fraction $\frac{2}{3}$ *de* $\frac{3}{4}$ se réduit à $\frac{6}{12}$ ou $\frac{1}{2}$: la fraction $\frac{2}{3}$ *des* $\frac{3}{4}$ *de* $\frac{5}{6}$, se réduit à $\frac{30}{72}$ ou $\frac{5}{12}$.

En effet, il est facile de voir que prendre les $\frac{2}{3}$ *de* $\frac{3}{4}$, n'est autre chose que multiplier $\frac{3}{4}$ par $\frac{2}{3}$, puisque c'est prendre $\frac{2}{3}$ de fois la fraction $\frac{3}{4}$; pareillement prendre les $\frac{2}{3}$ *des* $\frac{3}{4}$ *de* $\frac{5}{6}$ revient à prendre les $\frac{6}{12}$ *de* $\frac{5}{6}$, puisque $\frac{2}{3}$ *de* $\frac{3}{4}$ reviennent à $\frac{6}{12}$; et ce qu'on vient de dire fait connoître que les $\frac{6}{12}$ *de* $\frac{5}{6}$ reviennent à $\frac{30}{72}$ ou $\frac{5}{12}$.

Si on demandoit les $\frac{3}{4}$ de $5\,\frac{3}{8}$, on convertiroit l'entier 5, en huitièmes ; et la question seroit réduite à évaluer la fraction de fraction $\frac{3}{4}$ *de* $\frac{43}{8}$, qu'on trouveroit être $\frac{129}{32}$ ou $4\,\frac{1}{32}$.

Digitized by Google

Au reste, il n'est pas toujours nécessaire de ramener une fraction de fraction, à être exprimée par une seule fraction. On évalue quelquefois plus aisément la fraction de fraction, en la laissant sous sa forme actuelle, qu'en la réduisant : en voici un exemple.

Dans les pièces de campagne, la saillie de l'embaze sur le renfort en avant et joignant le tourillon, est de $\frac{1}{12}$ plus $\frac{1}{2}$ de $\frac{1}{12}$ du diamètre du boulet ; si je veux savoir la valeur totale de cette saillie, pour une pièce de 12, où le diamètre du boulet est de $4^{po.}$ $4^{l.}$ $9^{pts.}$, j'opère comme il suit.

Le $\frac{1}{12}$ du diamètre du boulet.	$0^{po.}$	$4^{l.}$	$4^{pts.}$	$\frac{3}{4}$
La moitié du $\frac{1}{12}$ ou $\frac{1}{2}$ du $\frac{1}{12}$.	0.	2.	2	$\frac{3}{8}$
DONC la saillie est de.	0.	6.	7	$\frac{3}{8}$

Des Nombres complexes.

110. Quoique les règles que nous avons exposées jusqu'ici, puissent servir aussi à calculer les nombres complexes, nous croyons cependant devoir considérer ceux-ci d'une manière plus particulière, parce que la division qu'on y fait de l'unité principale, en facilite souvent le calcul.

Il y a plusieurs sortes de nombres complexes, et les règles, pour les calculer, tiennent beaucoup à la division qu'on a faite de l'unité : cependant il n'est pas nécessaire d'examiner toutes ces espèces pour être en état de les calculer ; mais

il importe de savoir quels rapports leurs différentes parties ont, tant entr'elles, qu'à l'égard de l'unité principale. On peut voir à la fin de ce traité, la Table générale de ces rapports.

Addition des nombres complexes.

111. Pour faire cette opération, on écrit tous les nombres proposés, les uns au-dessous des autres, de manière que toutes les parties d'une même espèce se trouvent chacune dans une même colonne verticale; et après avoir souligné le tout, on commence l'addition par les parties de l'espèce la plus petite : si leur somme ne compose pas une unité de l'espèce immédiatement supérieure, on l'écrit au-dessous; si elle renferme assez de parties pour composer une ou plusieurs unités de l'espèce immédiatement supérieure, on n'écrit, au-dessous de cette colonne, que l'excédant d'un nombre juste d'unités de cette seconde espèce, et on retient celles-ci pour les ajouter avec leurs semblables, sur lesquelles on procède de la même manière.

EXEMPLE I.

Digitized by Google

EXEMPLE I.

On propose d'ajouter. . . .	227^{tt}	14^{s}	8^{d}
	2549.	18.	5
	184.	11.	11
	17.	10.	7
	2979.	15.	7 somme.

La somme des deniers est 31, qui renferment 2 douzaines de deniers, ou 2 sous, et 7 deniers. Je pose les 7 deniers, et je retiens 2 sous, que j'ajoute avec les unités de sous, ce qui donne 15 sous, dont je pose seulement le chiffre 5, et je retiens la dixaine pour l'ajouter aux dixaines, ce qui me donne 5; et comme il faut 2 dixaines de sous pour faire une livre; je prends la moitié de 5, qui est 2, avec 1 pour reste; je pose ce reste, et je porte les 2 livres à la colonne des livres, que j'ajoute comme à l'ordinaire.

EXEMPLE II.

On propose d'ajouter.	54$^{t.}$	2$^{pi.}$	3$^{po.}$	9$^{l.}$
	12.	5.	4.	11
	9.	4.	11.	11
	8.	2.	9.	10
	85.	3.	6.	5

La somme des lignes monte à 41, qui font 3 pouces 5 lignes; je pose 5 lignes et je retiens les 3 pouces, que j'ajoute avec les pouces: le tout me donne 30 pouces, qui valent 2 pieds 6 pouces; je pose les 6 pouces, et je retiens les 2 pieds, qui, ajoutés avec les pieds, me donnent 15 pieds, qui valent 2 toises 3 pieds; je pose les 3 pieds, et j'ajoute les 2 toises avec les toises, que je

trouve monter à 85 toises, en sorte que la somme est 85 toises 3 pieds 6 pouces 5 lignes.

EXEMPLE III.

13℔	15℥	6ʒ	1℈	14gr
26.	14.	7.	2.	23
34.	4.	5.	0.	20
54.	2.	7.	2.	18
32.	15.	3.	1.	19
162.	5.	7.	0.	22

Voyez la Table générale, à la fin de ce Traité.

Soustraction des Nombres complexes.

112. Écrivez les nombres proposés, comme dans l'addition ; et commencez la soustraction par les unités de l'espèce la plus basse. Si le nombre inférieur peut être retranché du nombre supérieur, écrivez le reste au-dessous ; s'il ne peut en être retranché, empruntez sur l'espèce immédiatement supérieure, une unité, que vous réduirez à l'espèce dont il s'agit, et que vous ajouterez au nombre dont vous ne pouvez retrancher. Faites la même chose pour chaque espèce ; et lorsque vous aurez été obligé d'emprunter, diminuez d'une unité le nombre sur lequel vous avez fait cet emprunt. Enfin, écrivez chaque reste à mesure que vous le trouverez, au-dessous du nombre qui l'a donné.

EXEMPLE I.

De.	143ᵗᵗ	17ˢ	6ᵈ
on veut ôter.	75.	12.	9
	68.	4.	9 reste.

Ne pouvant ôter 9 deniers de 6 deniers, j'emprunte 1 sou qui vaut 12 deniers, et 6 font 18, desquels ôtant 9, il reste 9; j'ôte ensuite 12 sous, non pas de 17 sous, mais de 16 qui restent après l'emprunt, et il reste 4; enfin je retranche 75 livres de 143 livres, et il me reste 68 livres.

EXEMPLE. II.

De.	163ᵗᵗ	0ˢ	5ᵈ
on veut ôter.	84.	18.	9
	78.	1.	8 reste.

Comme je ne puis ôter 9 deniers de 5 deniers, et que d'ailleurs il n'y a pas de sous sur lesquels je puisse emprunter, j'emprunte une livre sur 163 livres, mais j'en laisse, par la pensée, 19 sous à la place du zéro, après quoi j'opère comme ci-dessus.

Multiplication des Nombres complexes.

113. On peut réduire généralement la multiplication des nombres complexes, à la multiplication d'une fraction par une fraction ; multiplication dont nous avons donné la règle (97 et 98).

Digitized by Google

Par exemple, si on demande ce que doivent coûter $54^{t.}\ 3^{pi.}$ d'ouvrage, à raison de $42^{₶}\ 17^{s}\ 8^{d}$ la toise; on peut réduire le multiplicande $42^{₶}\ 17^{s}\ 8^{d}$, tout en deniers, ce qui donnera 10292 deniers, et comme le denier est la 240^{e}. partie de la livre, le multiplicande peut être représenté par $\frac{10292}{240}$ de la livre : pareillement on réduira le multiplicateur $54^{t.}\ 3^{pi.}$ tout en pieds, ce qui donnera $327^{pi.}$ et comme le pied est la sixième partie de la toise, on aura pour multiplicateur $\frac{327}{6}$ de toise, en sorte que la question est réduite à multiplier $\frac{10292}{240}$ de livre par $\frac{327}{6}$, ce qui (97) donnera $\frac{3365484}{1440}$ de livre, qui (104) valent $2337^{₶}\ 2^{s}\ 10^{d}$.

Cette méthode s'étend à toute espèce de nombres complexes, mais elle exige plus de calcul que celle que nous allons exposer; c'est pourquoi nous ne nous y arrêterons pas davantage.

114. Un nombre qui est contenu exactement dans un autre, est dit *partie aliquote* de cet autre; ainsi 3 est partie aliquote de 12 : il en est de même de 2, de 4 et de 6.

115. Rappelons-nous que multiplier n'étant autre chose que prendre le multiplicande un certain nombre de fois; multiplier par 8 $\frac{3}{4}$, par exemple, c'est prendre le multiplicande 8 fois, et le prendre encore $\frac{3}{4}$ de fois, ou en prendre les $\frac{3}{4}$. Or on peut prendre ces $\frac{3}{4}$, ou en prenant d'abord le quart, et l'écrivant 3 fois, ou bien en prenant d'abord la moitié, et ensuite la moitié de cette moitié.

Ainsi pour multiplier 84 par $8\frac{3}{4}$.

J'écrirois. 84

$8\frac{3}{4}$

672

42

21

735 produit.

Et multipliant 84 par 8, j'aurois d'abord 672. Ensuite pour prendre les $\frac{3}{4}$ de 84, je prendrois d'abord la moitié qui est 42 ; puis pour prendre pour le quart restant, je prendrois la moitié de 42, qui est 21, et réunissant ces trois produits particuliers, j'aurois 735 pour le produit total.

116. Pour appliquer ceci aux nombres complexes, il faut remarquer que les différentes espèces d'unités au-dessous de l'unité principale, sont des fractions les unes à l'égard des autres ; et à l'égard de cette unité principale ; que par conséquent, pour multiplier facilement par ces sortes de nombres, il faut faire en sorte de les décomposer en parties aliquotes de l'unité principale, de manière que les parties aliquotes puissent être employées commodément, ou de le décomposer en parties aliquotes les unes des autres ; et si cette décomposition ne fournit que des parties aliquotes qui ne soient pas commodes dans le calcul, on y suppléera par de faux pro-

Digitized by Google

duits ; c'est ce que nous allons développer dans les exemples suivans.

EXEMPLE I.

On demande combien doivent coûter 54$^{t.}$ 3$^{pi.}$, à raison de 72$^{\#}$ la toise.

Il faut multiplier.	72$^{\#}$		
par.	54$^{t.}$	3$^{pi.}$	
	288$^{\#}$	0^{s}	0^{d}
	360		
Pour 3 pieds.	36		
	3924	0.	0

On multipliera d'abord, selon les règles ordinaires, 72 liv. par 54. Ensuite, pour multiplier par 3$^{pi.}$ qui sont la moitié de la toise, et qui par conséquent ne doivent donner que la moitié du prix de la toise ; on prendra la moitié de 72 livres, et additionnant, on aura 3924 livres pour produit total.

EXEMPLE II.

Si on avoit.	72$^{\#}$		
à multiplier par.	54$^{t.}$	5$^{pi.}$	
	288$^{\#}$	0^{s}	0^{d}
	360		
Pour trois pieds.	36		
Pour 2 pieds.	24		
	3948.	0,	0

On multipliera d'abord 72 livres par 54. Ensuite, au lieu de multiplier par $\frac{5}{6}$, parce que 5 pieds font les $\frac{5}{6}$ de

Digitized by Google

la toise; on décomposera 5 pieds, en 3 pieds et 2 pieds, dont le premier est la moitié, et le second le $\frac{1}{3}$ de la toise; on prendra donc d'abord la moitié de 72 livres, et ensuite le $\frac{1}{3}$ de 72 livres, et on aura, en réunissant tous ces produits particuliers, 3948 livres pour produit total.

EXEMPLE III.

Que l'on ait.	72^{tt}		
à multiplier par.	$5^{t.}$	$4^{pi.}$	$8^{po.}$
	360^{tt}	0^{s}	0^{d}
Pour 3 pieds.	36		
Pour 1 pied	12		
Pour 4 pouces	4		
Pour 4 pouces	4		
	416	0.	0

Après avoir multiplié par 5 toises, on multipliera par 4 pieds; et pour cet effet on décomposera ce nombre en 3 pieds et un pied; pour trois pieds on prendra la moitié de 72 livres, qui est 36 livres, et pour 1 pied, on remarquera que c'est le $\frac{1}{3}$ de 3 pieds, et par conséquent on prendra le $\frac{1}{3}$ de 36 livres, qui est 12 livres. Ensuite pour multiplier par 8 pouces, au lieu de comparer ces 8 pouces à la toise, on les comparera au pied, et on les décomposera en 4 pouces et 4 pouces qui sont chacun le $\frac{1}{3}$ du pied, et qui par conséquent donneront chacun le $\frac{1}{3}$ de 12 livres. Enfin réunissant, on aura 416^{tt} 0^{s} 0^{d} pour produit.

117. Si le multiplicande est aussi un nombre complexe, on se conduira comme il va être expliqué dans l'exemple suivant.

EXEMPLE IV.

Si l'on a.	72#	6ſ	6d
à multiplier par.	27t.	4pi.	8po.
	504#	0ſ	0d
	144		
Pour 5 sous.	6.	15.	0
Pour 1 sou.	1.	7.	0
Pour 6 deniers	0.	13.	6
Pour 3 pieds	36.	3.	3
Pour 1 pied.	12.	1.	1
Pour 4 pouces.	4.	0.	4 $\frac{1}{3}$
Pour 4 pouces	4.	0.	4 $\frac{1}{3}$
	2009.	0.	6 $\frac{2}{3}$

On multipliera d'abord 72 livres par 27. Ensuite pour multiplier 6 sous par 27, on décomposera ces 6 sous, en 5 sous et 1 sou. Les 5 sous faisant le quart de la livre, doivent, étant multipliés par 27; donner 27 fois le quart de la livre ou le quart de 27 livres; on prendra donc le quart de 27 livres, qui est 6# 15ſ. Pour multiplier 1 sou par 27, on remarquera que 1 sou est la cinquième partie de 5 qu'on vient de multiplier; ainsi on prendra le cinquième de 6# 15ſ qui sera une livre 7 sous: à l'égard des 6 deniers, on fera attention qu'ils sont la moitié de 1 sou, et par conséquent on prendra la moitié d'une livre 7 sous qu'on a eue pour 1 sou.

Jusques-là tout le multiplicande est multiplié par 27.

Pour multiplier par 4 pieds, on s'y prendra de la même manière que dans l'exemple précédent; c'est-à-dire, que pour les 4 pieds, on prendra d'abord pour 3 pieds, la moitié 36# 3ſ 3d du multiplicande, et pour 1 pied, le tiers de ce que donnent les 3 pieds.

Digitized by Google

Enfin pour 8 pouces on prendra 2 fois pour 4 ; c'est-à-dire, qu'on écrira deux fois le tiers de ce qu'on vient d'avoir pour 1 pied ; en réunissant toutes ces différentes parties, on aura 2009# 0s 6d $\frac{2}{3}$ pour produit total.

118. Jusqu'ici les parties du multiplicande qu'il a fallu prendre, ont été assez faciles à évaluer ; mais dans les cas où ces parties seroient plus composées, on se conduiroit comme dans l'exemple suivant.

EXEMPLE V.

A raison de.	34#	10s	2d la toise,
Combien doivent coûter. . .	17 toises ?		
	238#	0s	0d
	34		
	8.	10	
	~~0~~.	~~17~~	
	0.	2.	10
	586.	12.	10

Après avoir multiplié 34 livres par 17, et ensuite les 10 sous par 17, en prenant moitié de 17, on multipliera 2 deniers qui font la sixième partie d'un sou, et par conséquent la sixième partie de la dixième partie, ou la 60e. partie de 10 sous; mais au lieu de prendre la 60e. partie de 8 livres 10 sous, il sera plus commode de faire un faux produit, et de prendre d'abord le dixième de ce qu'ont donné 10 sous; c'est-à-dire, le dixième de 8 livres 10 sous; ce dixième qui est 0 livres 17 sous, est pour 1 sou ; mais comme il ne faut que pour le sixième d'un sou, on barrera ce faux produit, et on en écrira le sixième au-dessous.

Digitized by Google

EXEMPLE VI.

Combien pour 34# 10ʃ 2ᵈ fera-t-on faire d'ouvrage à raison de une livre pour 17 toises?

Il faut multiplier 17 toises par 34# 10ʃ 2ᵈ; c'est-à-dire, prendre 17 toises autant de fois qu'il y a d'unités dans 34# 10ʃ 2ᵈ.

17 toises.					
34#	10ʃ	2ᵈ			
68t.	0pi.	0po.	0l.	0pts.	
51					
8.	3				
0	5	1	2	4	$\frac{4}{5}$
0.	0.	10.	2.	4 $\frac{4}{5}$	
586.	3.	10.	2.	4 $\frac{4}{5}$	

Ainsi on multipliera d'abord 17 toises par 34; ensuite pour multiplier 17 toises par 10 sous, on prendra la moitié de 17 toises, parce que 10 sous font la moitié de la livre, et on aura 8 toises 3 pieds. Pour multiplier par 2 deniers, on cherchera, pour plus de facilité, ce que donneroit 1 sou, en prenant le dixième de ce qu'ont donné 10 sous; ce dixième est 0t. 5pi. 1po. 2l. 4pts et $\frac{8}{10}$ ou $\frac{4}{5}$ de point; on le barrera comme ne devant pas faire partie du produit, mais on en prendra le sixième pour avoir le produit de 2 deniers, et on écrira au-dessous ce sixième, qui est 0t. 0pi. 10po. 2l. 4pts. et $\frac{24}{30}$ ou $\frac{4}{5}$.

Nous avons donné cet exemple, principalement pour confirmer ce que nous avons dit (45), qu'il

importoit de distinguer le multiplicande, du multiplicateur, lorsqu'ils sont tous les deux concrets : en effet, dans l'exemple précédent, ainsi que dans celui-ci, les facteurs du produit sont également 17 toises et $34^{\#}\ 10^{s}\ 2^{d}$; cependant les deux produits sont différens.

Division d'un nombre complexe par un nombre incomplexe.

119. Si le dividende seul est complexe, et si en même-temps le dividende et le diviseur ont des unités de différente espèce, on divisera d'abord les unités principales du dividende, selon la règle ordinaire ; ce qui restera de cette division, on le réduira (57) en unités de la seconde espèce, qu'on ajoutera avec celles de même espèce qui se trouveront dans le dividende, et on divisera le tout comme à l'ordinaire : on réduira pareillement le reste de cette division en unités de la troisième espèce, auxquelles on ajoutera celles de la même espèce qui se trouveront dans le dividende, et on divisera le tout comme ci-dessus ; on continuera de réduire les restes, en unités de l'espèce suivante, tant qu'ils s'en trouvera d'inférieures dans le dividende.

EXEMPLE I.

On a donné 4783# 3s 9d pour payement de 87 toises d'ouvrage ; on demande à combien cela revient la toise ?

4783# 3s 9d	87
433	54# 19s 7d
85	
1703s	
833	
50	
609d	
000	

Il faut diviser 4783# 3s 9d par 87, en commençant par les livres ?

Les 4783 livres, divisées par 87, selon la règle ordinaire, donneront 54 livres pour quotient, et 85 livres pour reste : ces 85 livres réduites en sous (57), donneront avec les 3 sous du dividende 1703 sous, qui, divisés par 87, donnent 19 sous pour quotient, et 50 sous pour reste : ces 50 sous réduits en deniers, donnent, avec les 9 deniers du dividende, 609 deniers, lesquels, divisés par 87, donnent enfin 7 deniers pour quotient.

EXEMPLE II.

On a touché 3376# 5s 6d pour payement d'une autre somme sur laquelle on a retenu les 4 deniers pour livre. On demande quelle a dû être la valeur des 4 deniers pour livre ?

Les 4 deniers pour livre étant le $\frac{1}{60}$ de la somme principale inconnue ; la somme reçue est donc les $\frac{59}{60}$

Digitized by Google

de celle-ci, et par conséquent les 4 deniers pour livre sont la 59^{e}. partie de la somme reçue : il faut donc diviser 3376# 5^{s} 6^{d} par 59,

3376# 5^{s} 6^{d}	59
	57# 4^{s} 6^{d}

et l'on trouvera 57# 4^{s} 6^{d}, lesquels ajoutés à 3376# 5^{s} 6^{d}, font connoître que la somme principale étoit de 3433# 10^{s}.

120. Mais si le dividende et le diviseur ont des unités de même espèce, il faut, avant de faire la division, examiner si le quotient doit être de même espèce qu'eux ; ce que l'état de la question décide toujours.

121. Dans le cas où le dividende et le diviseur étant de même espèce, le quotient devra aussi être de même espèce qu'eux, la division se fera précisément comme dans le cas précédent ; par exemple, si on proposoit cette question, 1243 liv. ont produit un bénéfice de 7254 livres, à combien cela revient-il par livre ? Il est évident que le quotient doit avoir des unités de même espèce que le dividende et le diviseur ; c'est-à-dire, doit être des livres, et qu'on doit diviser 7254 livres par 1243, en réduisant, comme dans l'exemple précédent, le reste de cette division en sous, et le second reste en deniers, et on trouvera 5# 16^{s} 8^{d} $\frac{760}{1243}$, pour réponse à la question.

122. Mais lorsque le dividende et le diviseur étant de même espèce, le quotient devra être d'espèce différente ; alors il faudra commencer par reduire (57), le dividende et le diviseur, chacun à la plus petite espèce qui soit dans le dividende ; après quoi on fera la division comme dans le cas précédent, et on y traitera les unités du dividende, comme si elles étoient de même espèce que celles que doit avoir le quotient.

Par exemple, si on proposoit cette question, combien pour 7954^{tt} 11^{s} 7^{d} fera-t-on faire d'ouvrage, à raison de 72 livres la toise ? Il est clair, par la nature de la question, que le quotient doit être des toises et parties de toise. On réduira donc 7954^{tt} 11^{s} 7^{d} tout en deniers, ce qui donnera 1909099 ; on réduira pareillement 72 livres en deniers, et on aura 17280 ; on divisera 1909099 considéré comme des toises, par 17280, et on aura pour quotient 110$^{t.}$ 2$^{pi.}$ 10$^{po.}$ 6$^{l.}$ $\frac{12}{20}$.

Division d'un Nombre complexe par un Nombre complexe.

123. Lorsque le diviseur est aussi un nombre complexe, il faut le réduire à sa plus petite espèce (57), multiplier le dividende par le nombre qui exprime combien il faut de parties de la plus petite espèce du diviseur pour composer l'unité principale de ce même diviseur ; alors la division sera

Digitized by Google

réduite au cas précédent où le diviseur étoit incomplexe.

EXEMPLE.

$57^{t.}$ $5^{pi.}$ $5^{po.}$ d'ouvrage ont été payés 854^{lt} 17^{s} 11^{d}; on demande à combien cela revient la toise? Il faut diviser 854^{lt} 17^{s} 11^{d} par $57^{t.}$ $5^{pi.}$ $5^{po.}$; et pour cet effet je réduis les $57^{t.}$ $5^{pi.}$ $5^{po.}$ en pouces, ce qui me donne 4169 pour nouveau diviseur, et comme il faut $72^{po.}$ pour faire la toise, qui est l'unité principale du diviseur, je multiplie le dividende proposé 854^{lt} 17^{s} 11^{d} par 72, ce qui me donne 61552^{lt} 10^{s} pour nouveau dividende, en sorte que je divise comme il suit.

854^{lt} 17^{s} 11^{d} 72	$57^{t.}$ $5^{pi.}$ $5^{po.}$
61552^{lt} 10^{s} 3186	4169 pouc. 14^{lt} 15^{s} $3^{d}\frac{1833}{4169}$
63730^{s} 1195	
14340^{d} 1833	

Les 61552 livres, divisées par 4169 donnent 14 livres pour quotient, et 3186 pour reste. Ces 3186 liv. réduites en sous, donnent avec les 10 sous du dividende 63730 sous, qui divisés par 4169 donnent 15 sous pour quotient, et 1195 sous de reste. Ces 1195 sous réduits en deniers, valent 14340 deniers, lesquels divisés par 4169 donnent 3 deniers pour quotient, et 1833 deniers pour reste; en sorte que le quotient est 14^{lt} 15^{s} $3^{d}\frac{1833}{4169}$ de deniers.

Digitized by Google

Pour entendre la raison de cette régle, il faut faire attention que les 57^{t} $5^{pi.}$ $5^{po.}$ valant 4169 pouces, et le pouce étant la 72^{e}. partie de la toise, le diviseur est $\frac{4169}{72}$ de la toise : or, pour diviser par une fraction, il faut (101) renverser la fraction diviseur, et multiplier ensuite par cette fraction ainsi renversée ; il faut donc ici multiplier par $\frac{72}{4169}$; ce qui revient à multiplier d'abord par 72, et à diviser ensuite par 4169, ainsi que le prescrit la règle que nous donnons.

Comme la division par un nombre complexe se réduit, ainsi qu'on vient de le voir, à la division par un nombre incomplexe, on doit avoir ici les mêmes attentions, à l'égard de la nature des unités que nons avons eues (118, 119 et 120).

Ce seroit ici le lieu de parler du toisé ou de la multiplication et de la division géométriques : ces opérations ne diffèrent en rien, pour le procédé, de celles que nous venons d'exposer ; en sorte qu'il n'y auroit ici d'autre chose à ajouter que d'expliquer quelle est la nature des unités des facteurs et du produit, mais cela appartient à la Géométrie. Nous remettrons donc à en parler, jusqu'à ce que nous soyons arrivés à la Géométrie.

De

Digitized by Google

De la formation des Nombres quarrés et de l'extraction de leur racine.

124. On appelle *quarré* d'un nombre le produit qui resulte de la multiplication de ce nombre par lui-même ; ainsi 25 est le quarré de 5, parce que 25 résulte de la multiplication de 5 par 5.

125. La *racine quarrée* d'un nombre proposé, est le nombre, qui multiplié par lui-même, reproduiroit ce même nombre proposé ; ainsi 5 est la racine quarrée de 25 ; 7 est la racine quarrée de 49.

126. Un nombre que l'on quarre, est donc tout-à-la-fois multiplicande et multiplicateur ; il est donc deux fois facteur (42) du produit ; c'est pour cela qu'on appelle aussi ce produit ou quarré, la *seconde puissance* de ce nombre.

Il ne faut d'autre art pour quarrer un nombre, que de le multiplier par lui-même selon les règles ordinaires de la multiplication ; mais pour extraire la racine quarrée d'un nombre ; c'est-à-dire, pour revenir du quarré à la racine, il faut une méthode, du moins lorsque le nombre ou quarré proposé a plus de deux chiffres.

Lorsque le nombre proposé n'a qu'un ou deux

chiffres, sa racine en nombre entier est quelqu'un des nombres.

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,

Dont les quarrés sont

1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81.

Ainsi la racine quarrée de 72, par exemple, est 8 en nombres entiers, parce que 72 étant entre 64 et 81, sa racine est entre les racines de ceux-ci; c'est-à-dire, entre 8 et 9, elle est 8 et une fraction, fraction qu'à la vérité on ne peut pas assigner exactement, mais dont on peut approcher continuellement, ainsi que nous le verrons dans peu.

127. La racine quarrée d'un nombre qui n'est point un quarré parfait, s'appelle un nombre *sourd* ou *irrationnel* ou *incommensurable.*

128. Venons aux nombres qui ont plus de deux chiffres.

C'est en observant ce qui se passe dans la formation du quarré, que nous trouverons la méthode qu'on doit suivre pour revenir à la racine.

Pour quarrer un nombre tel que 54, par exemple :

$$\begin{array}{r} 54 \\ 54 \\ \hline 216 \\ 270 \\ \hline 2916 \end{array}$$

Après avoir écrit le multiplicande et le multiplicateur, comme on le voit ici, nous multiplions, comme à l'ordinaire, le 4 supérieur par le 4 inférieur, ce qui fait évidemment le *quarré des unités.*

Nous multiplions ensuite le 5 supérieur, par le 4 inférieur, ce qui fait *le produit des dixaines par les unités.*

Nous passons, après cela, au second chiffre du multiplicateur, et nous multiplions le 4 supérieur par le 5 inférieur, ce qui fait le produit des unités par les dixaines, ou (44) *le produit des dixaines par les unités.*

Enfin nous multiplions le 5 supérieur, par le 5 inférieur, ce qui fait *le quarré des dixaines.*

Nous ajoutons ces produits, et nous avons pour quarré, le nombre 2916, que nous voyons donc être composé *du quarré des dixaines, plus deux fois le produit des dixaines par les unités, plus le quarré des unités* du nombre 54.

129. Ce que nous venons d'observer étant une conséquence immédiate des règles de la multiplication, n'est pas plus particulier au nombre 54 qu'à tout autre nombre composé de dixaines et d'unités ; en sorte qu'on peut dire généralement que le quarré de tout nombre composé de dixaines et d'unités, renfermera les trois parties que nous

venons d'énoncer, savoir ; le quarré des dixaines de ce nombre, deux fois le produit des dixaines par les unités, et le quarré des unités.

130. Cela posé, comme le quarré des dixaines est des centaines, (puisque 10 fois 10 font 100); il est visible que ce quarré des dixaines ne peut faire partie des deux derniers chiffres du quarré total.

Pareillement le produit du double des dixaines multipliées par les unités, ne pouvant être moindre que des dixaines, ne peut faire partie du dernier chiffre du quarré total.

Donc pour revenir du quarré 2916, à sa racine, on peut raisonner ainsi.

EXEMPLE I.

29 . 16 | 54 racine.
41 . 6
104
———
000

Commençons par trouver les dixaines de cette racine : or la formation du quarré nous apprend qu'il y a dans 2916, le quarré de ces dixaines, et que ce quarré ne peut faire partie des deux derniers chiffres ; il est donc dans 29 ; et comme la racine quarrée de 29 ne peut être plus de 5, concluons-en que le nombre des dixaines de la

racine est 5, et portons-les à côté de 2916, comme on le voit ci-dessus.

Je quarre 5, et je retranche le produit 25 de 29, il me reste 4, à côté duquel j'abaisse les deux autres chiffres 16 du nombre proposé 2916.

Pour trouver maintenant les unités de la racine, je fais attention à ce que renferme le reste 416; il ne contient plus que deux parties du quarré, savoir, le double des dixaines de la racine multipliées par les unités, et le quarré des unités de cette même racine. De ces deux parties, la première suffit pour nous faire trouver les unités que nous cherchons; car puisqu'elle est formée du double des dixaines multipliées par les unités, si on la divise par le double des dixaines que nous connoissons, elle doit (67) donner pour quotient les unités : il ne s'agit donc plus que de savoir dans quelle partie de 416 est renfermé ce double des dixaines multipliées par les unités : or nous avons remarqué ci-dessus, qu'il ne pouvoit faire partie du dernier chiffre; il est donc dans 41 : il faut donc diviser 41 par le double 10 des dixaines trouvées; j'écris donc, sous 41, le double 10 des dixaines, et faisant la division, le quotient 4 que je trouve est le nombre des unités, que je porte à la droite des cinq dixaines trouvées.

Mais il faut observer que quoique le quo-

tient 4, que nous venons de trouver, soit en effet celui qui convient; cependant il peut arriver quelquefois que le quotient, trouvé de cette manière, soit plus fort qu'il ne convient; parce que 41, (c'est-à-dire, la partie qui reste après la séparation du dernier chiffre), renferme non-seulement le double des dixaines multiplié par les unités, mais encore les dixaines provenantes du quarré des unités; c'est pourquoi, pour n'avoir aucun doute sur le chiffre des unités, il faut employer la vérification suivante.

Après avoir trouvé le chiffre 4, des unités, et l'avoir écrit à la racine, je le porte à côté du double 10 des dixaines, ce qui fait 104, dont je multiplie successivement tous les chiffres par le même nombre 4, et je retranche les produits successifs des parties correspondantes de 416 : comme il ne reste rien, j'en concluds que la racine est en effet 54.

S'il restoit quelque chose, la racine n'en seroit pas moins la vraie racine en nombres entiers, à moins que ce reste ne fût plus grand que le double de la racine, augmenté de l'unité; mais c'est ce qu'on n'a point à craindre quand on prend le quotient toujours au plus fort.

La vérification que nous venons d'enseigner, est fondée sur la formation même du quarré; car quand on multiplie 104 par 4, il est évi-

Digitized by Google

dent qu'on forme le quarré des unités et le double des dixaines multiplié par les unités ; c'est-à-dire, ce qui complette le quarré parfait.

131. De ce que nous venons de dire, il faut conclure, que pour extraire la racine quarrée d'un nombre qui n'a pas plus de quatre chiffres, ni moins de 3, il faut, après en avoir séparé deux sur la droite, chercher la racine quarrée de la tranche qui reste à gauche ; cette racine sera le nombre des dixaines de la racine totale cherchée, et on l'écrira à côté du nombre proposé, en l'en séparant par un trait.

On soustraira de cette même tranche le quarré de la racine qu'on vient de trouver, et après avoir écrit le reste au-dessous de cette tranche, on abaissera à côté de ce reste les deux chiffres qu'on avoit séparés.

On séparera par un point le chiffre des unités de la tranche qu'on vient d'abaisser, et on divisera ce qui se trouvera sur la gauche, par le double des dixaines, qu'on écrira au-dessous.

On écrira le quotient à côté du premier chiffre de la racine, et on le portera ensuite à côté du double des dixaines qui a servi de diviseur.

Enfin on multipliera par ce même quotient, tous les chiffres qui se trouveront sur cette dernière ligne, et on retranchera leurs produits,

à mesure qu'on les trouvera, des chiffres qui leur correspondent dans la ligne au-dessus.

Achevons d'éclaircir ceci par un exemple.

EXEMPLE II.

On demande la racine quarrée de 7569.

75 . 69 | 87 racine.
116 . 9
167
———
000

Je sépare les deux chiffres 69, et je cherche la racine quarrée de 75; elle est 8; j'écris 8 à côté; je quarre 8 et je retranche de 75 le quarré 64; il me reste 11 que j'écris au-dessous de 75, et j'abaisse à côté de ce même 11 les chiffres 69 que j'avois séparés.

Je sépare dans 1169 le dernier chiffre 9, pour avoir dans 116 la partie que je dois diviser pour trouver les unités.

Je forme mon diviseur en doublant les 8 dixaines que j'ai trouvées, et j'écris ce diviseur au-dessous de 116; la division me donne pour quotient 7, que j'écris à la racine, à la droite de 8.

Je porte aussi ce quotient à côté du diviseur 16; je multiplie 167, qui forme la dernière ligne, par ce même quotient 7, et je retranche les produits à mesure que je les trouve, de 1169: il ne reste rien, ce qui prouve que 7569 est un quarré parfait, et le quarré de 87.

132. Il faut bien remarquer qu'on ne doit diviser par le double des dixaines, que la seule partie qui reste à gauche après qu'on a séparé

Digitized by Google

le dernier chiffre ; en sorte que si elle ne contenoit pas le double des dixaines, il ne faudroit pas pour cela employer le chiffre séparé : on mettroit o à la racine. Si au contraire on trouvoit que le double des dixaines y est plus de 9 fois, on ne mettroit cependant pas plus de 9 ; la raison en est la même que pour la division (*page* 48).

133. Après avoir bien compris ce que nous venons de dire sur la racine quarrée des nombres qui n'ont pas plus de 4 chiffres, on saisira facilement ce qu'il convient de faire lorsque le nombre des chiffres est plus grand. De quelque nombre de chiffres que la racine doive être composée, on peut toujours la concevoir composée de deux parties, dont l'une soit des dixaines, et l'autre des unités ; par exemple, 874 peut être considéré comme représentant 87 dixaines et 4 unités.

Cela posé, quand on a trouvé les deux premiers chiffres de la racine, par la méthode qu'on vient d'exposer ; on peut aussi trouver le troisième par la même méthode, en considérant ces deux premiers chiffres, comme ne faisant qu'un seul nombre de dixaines, et leur appliquant, pour trouver le troisième, tout ce qui a été dit du premier pour trouver le second.

Digitized by Google

Pareillement, quand on aura trouvé les trois premiers chiffres, s'il doit y en avoir un quatrième, on considérera les trois premiers comme ne faisant qu'un seul nombre de dixaines, auquel on appliquera, pour trouver le quatrième, le même raisonnement qu'on appliquoit aux deux premiers, pour trouver le troisième, et ainsi de suite.

Mais pour procéder avec ordre, il faut commencer par partager le nombre proposé en tranches, de deux chiffres chacune, en allant de droite à gauche la dernière pourra n'en contenir qu'un.

La raison de cette préparation est fondée sur ce que, considérant la racine comme composée de dixaines et d'unités, il faut, suivant ce qui a été dit ci-dessus (129 *et suiv.*), commencer par séparer les deux derniers chiffres sur la droite, pour avoir dans la partie qui reste à gauche, le quarré des dixaines : mais comme cette partie est elle-même composée de plus de deux chiffres, un raisonnement semblable conduit à en séparer encore deux sur la droite, et ainsi de suite.

Donnons un exemple de cette opération.

EXEMPLE III.

On demande la racine quarrée de 76807696.

```
76 . 80 . 76 . 96 | 8764
128.0
 167
------
 1117.6
  1746
------
  7009.6
   17524
------
   00000
```

Après avoir partagé le nombre proposé, en tranches de deux chiffres chacune, en allant de droite à gauche, je cherche quelle est la racine quarrée de la tranche 76, qui est le plus à gauche : je trouve qu'elle est 8, et j'écris 8 à côté du nombre proposé; je quarre 8 et je retranche le quarré 64, de 76 : j'ai pour reste 12 que j'écris au-dessous de 76 ; à côté de ce reste j'abaisse la tranche 80, dont je sépare le dernier chiffre par un point, et au-dessous de la partie 128, j'écris 16 double de la racine trouvée ; puis disant, en 128, combien de fois 16? Je trouve qu'il y est 7 fois ; j'écris 7 à la suite de la racine 8, et à côté du double 16 ; je multiplie 167 par ce même nombre 7, et je retranche de 1280 le produit de cette multiplication ; il me reste 111 à côté duquel j'abaisse la tranche 76, ce qui forme 11176 ; je sépare le dernier chiffre 6 de ce nombre, et sous la partie 1117 qui reste à gauche, j'écris 174 double de la racine 87 ; je divise 1117 par 174, et ayant trouvé 6 pour quotient, j'écris 6 à la racine et à côté du double 174 : je multiplie 1746 par ce même nombre 6, et je retranche de 11176, il

Digitized by Google

reste 700 ; à côté de ce reste j'abaisse 96, dont je sépare le dernier chiffre ; au-dessous de 7009, qui reste à gauche, j'écris 1752 double de la racine trouvée 876, et divisant 7009 par 1752, je trouve pour quotient 4, que j'écris à la racine et à côté du double 1752. Je multiplie 17524 par ce même nombre 4, et je retranche de 70096, il ne reste rien ; ainsi la racine quarrée de 76807696 est exactement 8764.

134. Lorsque le nombre proposé n'est point un quarré parfait, il y a un reste à la fin de l'opération, et la racine quarrée qu'on a trouvée, est la racine quarrée du plus grand quarré, contenu dans le nombre proposé ; alors il n'est pas possible d'extraire la racine quarrée exactement ; mais on peut en approcher si près qu'on le juge à propos ; c'est-à-dire, de manière que l'erreur qui en résulteroit dans le quarré soit au-dessous de telle quantité qu'on voudra.

Cette approximation se fait commodément par le moyen des décimales. Il faut concevoir à la suite du nombre proposé, deux fois autant de zéros qu'on voudra avoir de décimales à la racine ; faire l'opération comme à l'ordinaire, et séparer ensuite par une virgule sur la droite de la racine, moitié autant de décimales qu'on a mis de zéros à la suite du nombre proposé. En effet, si on a mis 4 zéros, par exemple, on a rendu le quarré 10000 fois trop grand ; la racine qu'on

Digitized by Google

trouve est donc 100 fois trop grande, puisque 10000 est le quarré de 100 ; si on a mis 6 zéros, on a rendu le quarré 1000000 fois trop grand, et par conséquent la racine qu'on trouve est 1000 fois trop grande, puisque 1000000 est le quarré de 1000 ; mais en séparant deux chiffres sur la droite dans le premier cas, et trois dans le second, on la ramène à ce qu'elle doit être (28).

EXEMPLE.

On demande la racine quarrée de 87567 à moins d'un millième près.

Pour faire des millièmes, il faut trois décimales ; il faut donc mettre 6 zéros au quarré 87567 ; ainsi il faut tirer la racine quarrée de 87567000000.

8.75.67.00.00.00 | 295917
47.5
49
346.7
585
5420.0
5909
10190.0
59181
427190.0
591827
129111

En faisant l'opération comme dans les exemples précé-

dens, on trouve pour racine quarrée, à moins d'une unité près, le nombre 295917; mais comme cette racine est celle de 87567000000 qui est 1000000 fois plus grand que 87567, dont on demande la racine; il faut rendre cette racine trouvée 295917, mille fois plus petite, c'est-à-dire, en séparer 3 chiffres sur la droite, et 295,917 sera la racine quarrée de 87567, à moins d'un millième près.

Pareillement, si on demande la racine quarrée de 2, à moins d'un dix-millième près, on tirera la racine quarrée de 200000000 qu'on trouvera être 14142; séparant les quatre chiffres de la droite par une virgule, on aura 1,4142 pour la racine quarrée de 2, approchée à moins d'un dix-millième près.

135. On a vu (97) que pour multiplier une fraction par une fraction, il falloit multiplier numérateur par numérateur, et dénominateur par dénominateur; par conséquent, pour quarrer une fraction, il faut quarrer le numérateur et le dénominateur.

Ainsi le quarré de $\frac{2}{3}$ est $\frac{4}{9}$, celui de $\frac{4}{5}$ est $\frac{16}{25}$.

136. Donc, réciproquement, pour tirer la racine quarrée d'une fraction, il faut tirer la racine quarrée du numérateur et celle du dénominateur.

Ainsi la racine quarrée de $\frac{9}{16}$ est $\frac{2}{4}$, parce que celle de 9 est 3, et celle de 16 est 4.

137. Mais il peut arriver que le numérateur ou le dénominateur, ou tous les deux, ne soient

Digitized by Google

point des quarrés parfaits ; s'il n'y a que le numérateur qui ne soit point un quarré, on en tirera la racine approchée par la méthode qu'on vient d'exposer, et ayant tiré la racine du dénominateur, on la donnera pour dénominateur à la racine du numérateur.

Ainsi si on demande la racine de $\frac{2}{9}$, on tirera la racine approchée du numérateur 2, qu'on trouvera 1, 4 ou 1,41, ou 1,414, ou 1,4142, etc. selon qu'on voudra en approcher plus ou moins ; et comme la racine quarrée de 9 est 3, on aura pour racine approchée de $\frac{2}{9}$, la quantité $\frac{1,4}{3}$ ou $\frac{1,41}{3}$ ou $\frac{1,414}{3}$ ou $\frac{1,4142}{3}$, etc.

Mais si le dénominateur n'est pas un quarré, on multipliera les deux termes de la fraction par ce même dénominateur, ce qui ne changera rien à la valeur de la fraction, et rendra ce dénominateur quarré ; alors on opérera comme dans le cas précédent.

Par exemple, si on demande la racine quarrée de $\frac{3}{5}$, on changera cette fraction en $\frac{15}{25}$; tirant la racine quarrée de 15, jusqu'à 3 décimales, par exemple, on aura 3,872 ; et comme la racine quarrée de 25 est 5, la racine quarrée de $\frac{15}{25}$ sera $\frac{3,872}{5}$.

Pour ne pas avoir plusieurs sortes de fractions à la fois, on réduira le résultat $\frac{3,872}{5}$ uniquement en décimales, en divisant 3,872 par 5, ce qui donnera 0,774 pour la racine de $\frac{3}{5}$ exprimée purement en décimales (92).

Digitized by Google

138. Enfin si on avoit des entiers joints à des fractions, on réduiroit ces entiers en fractions (80), et on opéreroit, comme il vient d'être dit, pour une fraction.

Ainsi pour tirer la racine quarrée de 8 $\frac{3}{7}$, on changeroit 8 $\frac{3}{7}$ en $\frac{59}{7}$, et celle-ci (136) en $\frac{413}{49}$, dont on trouveroit que la racine approchée est $\frac{20,322}{7}$ ou 2,903.

139. On peut aussi réduire en décimales la fraction qui accompagne l'entier, mais il faut observer d'y employer un nombre de décimales, pair et double de celui qu'on veut avoir à la racine, parce que le produit de la multiplication de deux nombres, qui ont des décimales, devant avoir autant de décimales qu'il y en a dans les deux facteurs (54), le quarré d'un nombre qui a des décimales, doit en avoir deux fois autant que ce nombre.

En appliquant cette méthode à 8$\frac{3}{7}$, on le transforme en 8,428571 (92), dont la racine est 2,903, comme ci-dessus.

140. Si on a à tirer la racine quarrée d'une quantité décimale, il faut avoir soin de rendre le nombre des décimales pair, s'il ne l'est pas, et cela par la même raison qui vient d'être dite (138); on y parviendra en mettant à la suite de ces décimales 1 ou 3, ou 5, etc. zéros, cela n'en change pas la valeur (29).

Ainsi

Digitized by Google

Ainsi, pour tirer la racine quarrée de 21,935, à moins d'un millième près, je tire la racine quarrée de 21,935000 qui est 4,683; c'est aussi celle de 21,935. On trouvera de même que celle de 0,542 est à moins d'un millième près 0,736, et que celle de 0,0054 est à moins d'un millième près 0,073.

De la formation des Nombres cubes, et de l'extraction de leur Racine.

140. Pour former ce qu'on appelle *le cube* d'un nombre, il faut d'abord multiplier ce nombre par lui-même, et multiplier ensuite, par ce même nombre, le produit résultant de cette première multiplication.

Ainsi le cube d'un nombre est, à proprement parler, le produit du quarré d'un nombre, multiplié par ce même nombre : 27 est le cube de 3, parce qu'il résulte de la multiplication de 9 (quarré de 3) par le même nombre 3.

Le nombre que l'on cube est donc trois fois facteur dans le cube ; c'est pour cette raison que le cube est aussi nommé *troisième puissance* ou *troisième degré* de ce nombre.

142. En général, on dit qu'un nombre est élevé à sa seconde, troisième, quatrième, cinquième, etc. puissance, quand on l'a multiplié

par lui-même, 1, 2, 3, 4, etc. fois consécutives, ou lorsqu'il est 2 fois, 3 fois, 4 fois, 5 fois, etc. facteur dans le produit.

143. La *racine cubique* d'un cube proposé, est le nombre, qui, multiplié par son quarré, produit ce cube; ainsi 3 est la racine cubique de 27.

144. On n'a donc pas besoin de règles pour former le cube d'un nombre; mais pour revenir du cube à sa racine, il faut une méthode. Nous déduirons cette méthode de l'examen de ce qui se passe dans la formation du cube.

Observons cependant qu'on n'a besoin de méthode pour extraire la racine cubique en nombres entiers, que lorsque le nombre proposé a moins de quatre chiffres; car 1000 étant le cube de 10, tout nombre au-dessous de 1000, et par conséquent de moins de quatre chiffres, aura pour racine moins que 10; c'est-à-dire, moins de deux chiffres.

Ainsi tout nombre qui tombera entre deux de ceux-ci:

1, 8, 27, 64, 125, 216, 343, 512, 729, aura sa racine cubique en nombre entier, entre les deux nombres correspondans de cette suite:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, dont la première contient les cubes.

Digitized by Google

145. On ne peut pas toujours assigner exactement en nombres la racine cubique de tout nombre proposé ; mais on peut approcher continuellement d'un nombre, qui, étant cubé, approche aussi de plus en plus de reproduire ce premier nombre ; c'est ce que nous verrons après avoir appris à trouver la racine d'un cube parfait.

146. Voyons pour cet effet, de quelles parties peut être composé le cube d'un nombre qui contiendroit des dixaines et des unités.

Puisque le cube résulte du quarré d'un nombre multiplié par ce même nombre, il est essentiel de se rappeller ici (127) que *le quarré d'un nombre composé de dixaines et d'unités, renferme, 1°. le quarré des dixaines ; 2°. deux fois le produit des dixaines par les unités ; 3°. le quarré des unités.*

Pour former le cube, il faut donc multiplier ces trois parties par les dixaines et par les unités du même nombre.

Afin d'apercevoir plus distinctement les produits qui en résulteront, donnons à cette opération simulée la forme suivante.

1°.

Le quarré des dixaines,	étant multiplié par les dixaines, donnera	Le cube des dixaines.
Deux fois le produit de dixaines par les unités,		Deux fois le produit du quarré des dixaines multiplié par les unités.
Le quarré des unités		Le produit des dixaines par le quarré des unités.

2°.

Le quarré des dixaines,	étant multiplié par les unités, donnera	Le produit du quarré des dixaines multiplié par les unités.
Deux fois le produit des dixaines par les unités,		Deux fois le produit des dixaines par le quarré des unités.
Le quarré des unités		Le cube des unités.

Donc en rassemblant ces 6 résultats, et réunissant ceux qui sont semblables, on voit que le cube d'un nombre composé de dixaines et d'unités, contient quatre parties ; savoir, *le cube des dixaines, trois fois le quarré des dixaines multiplié par les unités, trois fois les dixaines multipliées par le quarré des unités, et enfin le cube des unités.*

Formons d'après cela le cube d'un nombre composé de de dixaines et d'unités, de 43, par exemple,

$$\begin{array}{r} 64000 \\ 14400 \\ 1080 \\ 27 \\ \hline 79507 \end{array}$$

Digitized by Google

Nous prendrons donc le cube de 4 qui est 64; mais comme ce 4 est des dixaines, son cube sera des mille, parce que le cube de 10 est 1000; ainsi le cube des 4 dixaines sera 64000.

3 fois 16 ou 3 fois le quarré des 4 dixaines, étant multiplié par les 3 unités, donnera 144 centaines, parce que le quarré de 10 est 100; ainsi ce produit sera 14400.

3 fois 4 ou 3 fois les dixaines, étant multipliées par le quarré 9 des unités, donneront des dixaines, et ce produit sera 1080.

Enfin le cube des unités se terminera à la place des unités, et sera 27.

En réunissant ces quatre parties, on aura 79507 pour le cube de 43, cube qu'on auroit sans doute trouvé plus facilement, en multipliant 43 par 43, et le produit 1849 encore par 43; mais il ne s'agit pas tant ici de trouver la valeur du cube, que de reconnoître, par l'examen des parties qui le composent, la manière de revenir à sa racine.

147. Cela posé, voici le procédé de l'extraction de la racine cubique.

Exemple.

Soit donc proposé d'extraire la racine cubique de 79507,

Cube.	*Racine.*
79.507	43
155.07	
48	

Pour avoir la partie de ce nombre qui renferme le cube des dixaines de la racine, j'en sépare les

Digitized by Google

trois derniers chiffres, dans lesquels nous venons de voir que ce cube ne peut être compris, puisqu'il vaut des mille.

Je cherche la racine cubique de 79, elle est 4 que j'écris à côté.

Je cube 4, et j'ôte le produit 64, de 79, il me reste 15 que j'écris au-dessous de 79.

A côté de 15, j'abaisse 507, ce qui me donne 15507, dans lequel il doit y avoir 3 fois le quarré des quatre dixaines trouvées, multipliées par les unités que nous cherchons; plus, 3 fois ces mêmes dixaines, multipliées par le quarré des unités; plus enfin le cube des unités.

Je sépare les deux derniers chiffres 07; la partie 155 qui reste à gauche, renferme trois fois le quarré des dixaines, multiplié par les unités; c'est pourquoi, afin d'avoir les unités (67), je vais diviser cette partie 155, par le triple du quarré des quatre dixaines; c'est-à-dire, par 48.

Je trouve que 48 est 3 fois dans 155; j'écris donc 3 à la racine.

Pour éprouver cette racine, et connoître le reste, s'il y en a, nous pourrions composer les trois parties du cube qui doivent se trouver dans 15507, et voir si elles forment 15507, ou de combien elles en diffèrent; mais il est aussi commode de faire cette vérification, en cubant tout de suite 43, c'est-à-dire, en multipliant 43

Digitized by Google

par 43, ce qui produit 1849, et multipliant ce produit par 43, ce qui donne enfin 79507. Ainsi 43 est exactement la racine cubique.

Si le nombre proposé a plus de six chiffres, on raisonnera comme dans l'exemple ci-après.

EXEMPLE II.

Soit proposé d'extraire la racine cubique de 596947688.

596,947,688 | 842
849,47
192
592704

42436,88
21168
596947688

000000000

On considérera sa racine comme composée de dixaines et d'unités, et par cette raison on commencera par séparer les trois derniers chiffres.

La partie 596947 qui renferme le cube des dixaines, ayant plus de trois chiffres, sa racine en aura plus d'un, et par conséquent elle aura des dixaines et des unités : il faut donc pour trouver le cube de ces premières dixaines, séparer les trois chiffres 947.

Cela posé, je cherche la racine cubique de 596; elle est 8, j'écris ce 8 à côté.

Je cube 8, et je retranche le produit 512 de 596; il reste 84 que j'écris au-dessous de 596.

A côté de 84, j'abaisse 947, ce qui me donne 84947, dont je sépare les deux derniers chiffres.

Au-dessous de la partie 849, j'écris 192 qui est le triple

quarré de la racine 8, et je divise 849 par 192 ; je trouve pour quotient 4, que j'écris à la racine.

Pour vérifier cette racine, et avoir en même temps le reste, je cube 84, et je retranche le produit 592704, du nombre 596947 ; j'ai pour reste 4243.

A côté de ce reste, j'abaisse la tranche 688, et considérant la racine 84 comme un seul nombre qui marque les dixaines de la racine cherchée, je sépare les deux derniers chiffres 88 de la tranche abaissée, et je divise la partie 42436 par le triple quarré de 84, c'est-à-dire, par 21168, je trouve pour quotient 2, que j'écris à la suite de 84.

Pour vérifier la racine 842, et avoir le reste, s'il y en a, je cube 842, et je retranche le produit 596947688, du nombre proposé 596947688 ; et comme il ne reste rien, j'en conclus que 842 est la racine exacte de 596947688.

Il faut encore observer, 1°. que dans le cours de ces opérations, on ne doit jamais mettre plus de 9 à la racine.

2°. Si le chiffre qu'on porte à la racine étoit trop fort, on s'en appercevroit à ce que la soustraction ne pourroit se faire, et alors on diminueroit la racine successivement d'une, 2, 3, etc. unités, jusqu'à ce que la soustraction devînt possible.

148. Lorsque le nombre proposé n'est pas un cube parfait, la racine qu'on trouve n'est qu'une racine approchée, et il est rare qu'il soit suffisant de l'avoir en nombres entiers. Les décimales sont encore d'un usage très-avantageux pour pousser cette approximation beaucoup plus loin, et aussi

Digitized by Google

loin qu'on le desire, sans que cependant on puisse jamais atteindre à une racine exacte.

Pour approcher aussi près qu'on le voudra de la racine cubique d'un cube imparfait, il faut mettre à la suite de ce nombre trois fois autant de zéros qu'on veut avoir de décimales à la racine ; faire l'extraction comme dans les exemples précédens, et après l'opération faite, séparer par une virgule sur la droite de la racine, autant de chiffres qu'on vouloit avoir de décimales.

EXEMPLE.

On demande d'approcher de la racine cubique de 8755 jusqu'à moins d'un centième près. Pour avoir des centièmes à la racine, il faut deux décimales ; il faut donc mettre six zéros à la suite de 8755.

Ainsi la question se réduit à tirer la racine cubique de 8755000000.

8,755,000,000	2061
07,55	
12	
8000	
7550,00	
1200	
8741816	
131840,00	
127308	
8754552981	
447019	

Suivant ce qui a été dit ci-dessus, je partage ce nombre en tranches de trois chiffres chacune, en allant de droite à gauche.

Je tire la racine cubique de la dernière tranche 8; elle est 2 que j'ecris à la racine. Je cube 2 et je retranche le produit, de 8; j'ai pour reste 0, à côté duquel j'abaisse la tranche 755, dont je sépare les deux derniers chiffres 55: au-dessous de la partie restante 7, j'écris 12, triple quarré de la racine, et divisant 7 par 12, je trouve 0 pour quotient que j'écris à la racine.

Je cube la racine 20, ce qui me donne 8000 que je retranche de 8755; j'ai pour reste 755, à côté duquel j'abaisse la tranche 000, dont je sépare deux chiffres sur la droite; au-dessous de la partie restante 7550, j'écris 1200 triple quarré de la racine 20, et divisant 7550 par 1200, je trouve pour quotient 6 que j'écris à la racine.

Je cube la racine 206, et je retranche le produit de 8755000; j'ai pour reste 13184, à côté duquel j'abaisse la dernière tranche 000, dont je sépare les deux derniers chiffres. Au-dessous de la partie restante 131840, j'écris 127308 triple quarré de la racine trouvée 206. Je divise 131840 par 127308; je trouve pour quotient 1 que j'écris à la suite de 206. Je cube 2061, et ayant retranché de 8755000000 le produit 8754552981; j'ai pour reste 447019.

La racine cubique approchée 8755000000 est donc 2061; mais comme 8755000000 est 1000000 fois plus grand que 8755, sa racine est 100 fois plus grande que celle de 8755, puisque 1000000 est le cube de 100, donc la racine cubique de 8755 est 20,61.

Si on vouloit pousser l'approximation plus loin, on mettroit à la suite du reste trois zéros, et on

Digitized by Google

continueroit comme on a fait à chaque fois qu'on a abaissé une tranche.

149. Puisque, pour multiplier une fraction par une fraction, il faut multiplier numérateur par numérateur, et dénominateur par dénominateur ; il faudra donc, pour cuber une fraction, cuber son numérateur et son dénominateur. Donc, réciproquement, pour extraire la racine cubique d'une fraction, il faudra extraire la racine cubique du numérateur, et la racine cubique du dénominateur. Ainsi la racine cubique de $\frac{27}{64}$ est $\frac{3}{4}$, parce que la racine cubique de 27 est 3, et celle de 64 est 4.

150. Mais si le dénominateur seul est un cube, on tirera la racine approchée du numérateur, et on donnera à cette racine pour dénominateur, la racine cubique du dénominateur.

Par exemple, si on demande la racine cubique de $\frac{143}{343}$; comme le numérateur n'est pas un cube, j'en tire la racine approchée, qui sera 5,22, à moins d'un centième près, et tirant la racine de 343 qui est 7, j'ai $\frac{5,22}{7}$ pour la racine approchée de $\frac{143}{343}$, ou bien, en réduisant en décimales (92), j'ai 0,74 pour cette racine approchée à moins d'un centième près.

151. Si le dénominateur n'est pas un cube, on multipliera les deux termes de la fraction par

Digitized by Google

le quarré de ce dénominateur, et alors le nouveau dénominateur étant un cube, on se conduira comme il vient d'être dit.

Par exemple, si on demande la racine cubique de $\frac{3}{7}$, je multiplie le numérateur et le dénominateur par 49, quarré du dénominateur 7; j'ai $\frac{147}{343}$ qui est de même valeur que $\frac{3}{7}$. La racine cubique de $\frac{147}{343}$ est $\frac{5,27}{7}$, ou en réduisant purement en décimales 0,75; la racine cubique de $\frac{3}{7}$ est donc 0,75, à moins d'un centième près.

S'il y avoit des entiers joints aux fractions, on convertiroit le tout en fraction, et la question seroit réduite à tirer la racine cubique d'une fraction (148 *et suiv.*).

On pourroit aussi, soit qu'il y ait des entiers, soit qu'il n'y en ait point, réduire la fraction en décimales, mais il faut avoir soin de pousser cette réduction jusqu'à trois fois autant de décimales qu'on veut en avoir à la racine.

Ainsi, si on demandoit la racine cubique de $7\frac{3}{11}$, approchée jusqu'à moins d'un millième, on changeroit la fraction $\frac{3}{11}$ en 0,272727272, en sorte que, pour avoir la racine cubique de $7\frac{3}{11}$, on tireroit celle de 7,272727272, qu'on trouvera être 1,937.

152. Pour tirer la racine cubique d'un nombre qui aura des décimales, il faudra le préparer par un nombre suffisant de zéros mis à sa suite, de manière que le nombre de ses décimales

Digitized by Google

soit ou 3, ou 6, ou 9, etc. alors on en tirera la racine comme s'il n'y avoit pas de virgule ; et après l'opération faite, on séparera sur la droite de la racine, par une virgule, un nombre de chiffres qui soit le tiers du nombre des décimales de la quantité proposée ; en sorte que si la racine n'avoit pas suffisamment de chiffres pour que cette règle eût son exécution, on y suppléeroit par des zéros placés sur la gauche de cette racine.

Ainsi pour tirer la racine cubique de 6,54, à moins d'un millième près, je mettrai 7 zéros, et je tirerai la racine cubique de 6540000000 qui sera 1870, j'en séparerai 3 chiffres, puisqu'il y a 9 décimales au cube, et j'aurai 1,870, ou simplement 1,87 pour la racine cubique de 6,54. On trouvera de même que la racine cubique de 0,0052 est 0,1732, à moins d'un dix-millième près.

Des Raisons, Proportions et Progressions, et de quelques Règles qui en dépendent.

153. Les mots *raison* et *rapport* ont la même signification en Mathématiques, et l'un et l'autre expriment *le résultat de la comparaison de deux quantités.*

154. Si dans la comparaison de deux quantités, on a pour but de connoître de combien

Digitized by Google

l'une surpasse l'autre, ou en est surpassée, le résultat de cette comparaison, qui est la différence de ces deux quantités, se nomme leur *Rapport Arithmétique.*

Ainsi, si je compare 15 avec 8, pour connoître leur différence 7, ce nombre 7 qui est le résultat de la comparaison, est le rapport arithmétique de 15 à 8.

Pour marquer que l'on compare deux quantités sous ce point de vue, on sépare l'une de l'autre par un point; en sorte que 15 . 8 marque que l'on considère le rapport arithmétique de 15 à 8.

155. Si dans la comparaison de deux quantités, on se propose de connoître combien l'une contient l'autre, ou est contenue en elle, le résultat de cette comparaison se nomme leur *Rapport Géométrique.*

Par exemple, si je compare 12 à 3, pour savoir combien de fois 12 contient 3, le nombre 4 qui exprime ce nombre de fois, est le rapport géométrique de 12 à 3.

Pour marquer que l'on compare deux quantités sous ce point de vue, on sépare l'une de l'autre par deux points.

Cette expression 12 : 3, marque qu'on considère le rapport géométrique de 12 à 3.

156. Des deux quantités que l'on compare,

celle qu'on énonce ou qu'on écrit la première, se nomme *antécédent*, et la seconde se nomme *conséquent*.

Ainsi, dans le rapport 12 : 3, 12 est l'antécédent, et 3 est le conséquent; l'un et l'autre s'appellent les *termes* du rapport.

157. Pour avoir le rapport arithmétique de deux quantités, il n'y a donc autre chose à faire qu'à retrancher la plus petite de la plus grande.

158. Et pour avoir le rapport géométrique de deux quantités, il faut diviser l'une par l'autre.

159. Nous évaluerons ce rapport dorénavant, en divisant l'antécédent par le conséquent; ainsi le rapport de 12 à 3 est 4, et le rapport de 3 à 12 est $\frac{3}{12}$ ou $\frac{1}{4}$.

160. Un rapport arithmétique ne change point quand on ajoute à chacun de ces deux termes, ou qu'on en retranche une même quantité, parce que la différence (en quoi consiste le rapport) reste toujours la même.

161. Un rapport géométrique ne change point quand on multiplie ou quand on divise ses deux termes par un même nombre; car le rapport géométrique consistant (157) dans le quotient de la division de l'antécédent par le conséquent,

est une quantité fractionnaire qui ne peut changer par la multiplication ou la division de ces deux termes par un même nombre. Ainsi le rapport 3 : 12 est le même que celui 6 : 24 que l'on a en multipliant les deux termes du premier par 2, le même que celui de 1 : 4 que l'on a en divisant par 3.

162. Cette propriété sert à simplifier les rapports. Par exemple, si j'avois à examiner le rapport des longueurs de deux pièces d'artillerie, dont l'une seroit de 3 pieds $\frac{2}{3}$, et l'autre de 4 pieds $\frac{3}{4}$; je dirois, en réduisant tout en fraction, ce rapport est le même que celui de $\frac{11}{3}$ à $\frac{19}{4}$, ou (en réduisant au même dénominateur), le même que celui de $\frac{44}{12}$ à $\frac{57}{12}$, ou enfin, en supprimant le dénominateur 12, (ce qui revient au même que de multiplier les deux termes du rapport par 12,) est le même que celui de 44 à 57.

163. Lorsque quatre quantités sont telles que le rapport des deux premières, est le même que le rapport des deux dernières, on dit que ces quatre quantités forment une *proportion*, et cette proportion est arithmétique ou géométrique, selon que le rapport qu'on y considère est arithmétique ou géométrique.

Les quatre quantités 7, 9, 12, 14; forment une proportion

Digitized by Google

portion arithmétique, parce que la différence des deux premières est la même que celle des deux dernières.

Pour marquer que quatre quantités sont en proportion arithmétique, on les écrit, ainsi, 7 . 9 : 12 . 14, c'est-à-dire, qu'on sépare par un point, les deux termes de chaque rapport; et les deux rapports, par deux points. Le point qui sépare les deux termes de chaque rapport, signifie *est à;* et les deux points qui séparent les deux rapports, signifient *comme;* en sorte que pour énoncer la proportion ainsi écrite, on dit 7 *est à* 9, *comme* 12 *est à* 14.

Les quatre quantités 3, 15, 4, 20, forment une proportion géométrique, parce que 3 est contenu dans 15, comme 4 l'est dans 20.

Pour marquer qu'elles sont en proportion géométrique, on les écrit ainsi 3 : 15 :: 4 : 20; c'est-à-dire qu'on sépare les deux termes de chaque rapport, par deux points; et les deux rapports, par quatre points. Les deux points signifient *est à*, et les quatre points signifient *comme;* de sorte qu'on dit 3 *est à* 15, *comme* 4 *est à* 20.

Il faut seulement observer que, dans la proportion arithmétique, on fait précéder le mot *comme*, du mot *arithmétiquement.*

164. Le premier et le dernier terme de la

proportion se nomment les *extrêmes ;* le 2^e. et le 3^e. se nomment les *moyens.*

Comme il y a deux rapports, et par conséquent deux antécédens et deux conséquens, on dit, pour le premier rapport, *premier antécédent*, *premier conséquent ;* et pour le second, *second antécédent*, *second conséquent.*

165. Quand les deux termes moyens d'une proportion sont égaux, la proportion se nomme *proportion continue.*

3 . 7 : 7 . 11 forment une proportion arithmétique continue; on l'écrit ainsi ÷ 3 . 7 . 11; les deux points et la barre qui précèdent, sont pour avertir que dans l'énoncé on doit répéter le terme 7.

La proportion 5 : 20 :: 20 : 80 est une proportion géométrique continue, que par abréviation on écrit ainsi ∺ 5 : 20 : 80; l'usage des quatre points et de la barre est le même que dans la proportion arithmétique continue.

166. Il suit de ce que nous venons de dire sur les proportions arithmétiques et géométriques :

1°. Que si dans une proportion arithmétique, on ajoute à chacun des antécédens, ou si on en retranche la différence ou raison qui règne dans cette proportion, selon que l'antécédent sera plus petit ou plus grand que son conséquent, chaque antécédent deviendra égal à son conséquent; car c'est donner au plus petit terme de chaque rapport,

Digitized by Google

ce qui lui manque pour égaler son voisin, ou retrancher du plus grand ce dont il surpasse son voisin.

Ainsi dans la proportion 3 . 7 : 8 . 12, ajoutez la différence 4 au premier et au troisième termes, vous aurez 7 . 7 : 12 : 12, et il est aisé de sentir que cela est général.

2°. Si dans une proportion géométrique vous multipliez chacun des deux conséquens par le rapport, vous les rendrez pareillement égaux chacun à son antécédent; car multiplier le conséquent par le rapport, c'est le prendre autant de fois qu'il est contenu dans l'antécédent.

Ainsi dans la proportion 12 : 3 :: 20 : 5, multipliez 3 et 5 chacun par 4, et vous aurez 12 : 12 :: 20 : 20; pareillement dans la proportion 15 : 9 :: 45 : 27, multipliez 9 et 27 chacun par $\frac{15}{9}$ ou $\frac{5}{3}$ qui est le rapport, vous aurez 15 : 15 :: 45 : 45.

Propriétés des Proportions Arithmétiques.

167. La propriété fondamentale des proportions arithmétiques, est que *la somme des extrêmes est égale à la somme des moyens.*

Par exemple, dans cette proportion 3. 7 : 8. 12, la somme 3 et 12 des extrêmes, et celle 7 et 8 des moyens, sont également 15.

Digitized by Google

Voici comment on peut s'assurer que cette propriété est générale.

Si les deux premiers termes étoient égaux entre eux, et les deux derniers égaux aussi entre eux, comme dans cette proportion,

7 . 7 : 12 . 12.

Il est évident que la somme des extrêmes seroit égale à celle des moyens.

Or, toute proportion arithmétique peut être ramenée à cet état (165), en ajoutant à chaque antécédent, ou en ôtant la différence qui règne dans la proportion. Cette addition qui augmentera également la somme des extrêmes et celle des moyens, ne peut rien changer à l'égalité de ces deux sommes; ainsi si elles deviennent égales par cette addition, c'est qu'elles étoient égales sans cette même addition. Le raisonnement est le même pour le cas de la soustraction.

168. Puisque dans la proportion continue, les deux termes moyens sont égaux; il suit de ce qu'on vient de démontrer, que dans cette même proportion, la somme des extrêmes est double du terme moyen, ou que le terme moyen est la moitié de la somme des extrêmes.

Ainsi, pour avoir un moyen arithmétique entre 7 et 15, par exemple; j'ajoute 7 à 15, et prenant la moitié de la somme 22, j'ai 11 pour le terme moyen, en sorte que $\div$ 7. 11. 15.

Digitized by Google

Propriétés des Proportions Géométriques.

169. La propriété fondamentale de la proportion géométrique, est que *le produit des extrêmes est égal au produit des moyens ;* par exemple, dans cette proportion 3 : 15 :: 7 : 35, le produit de 35 par 3, et celui de 15 par 7, sont également 105.

Voici comment on peut se convaincre, que cette propriété a lieu dans toute proportion.

Si les antécédens étoient égaux à leurs conséquens, comme dans cette proportion,

3 : 3 :: 7 : 7

il est évident que le produit des extrêmes seroit égal au produit des moyens.

Mais on peut toujours ramener une proportion à cet état (165), en multipliant les deux conséquens par la raison : cette multiplication fera, à la vérité, que le produit des extrêmes sera un certain nombre de fois plus grand qu'il n'auroit été, ou sera un certain nombre de fois plus petit, si le rapport est une fraction ; mais elle produira le même effet sur celui des moyens : donc, puisqu'après cette multiplication, le produit des extrêmes seroit égal au produit des moyens, ces deux produits doivent aussi être égaux sans cette même multiplication.

Digitized by Google

On peut donc prendre le produit des extrêmes pour celui des moyens, et réciproquement.

Concluons aussi que *dans la proportion continue, le produit des extrêmes est égal au quarré du terme moyen*, et que par conséquent on a le terme moyen en tirant la racine quarrée du produit des extrêmes.

Ainsi pour avoir un moyen proportionnel géométrique entre 4 et 9, je multiplie 4 par 9, et la racine quarrée 6 du produit 36, est le moyen proportionnel cherché.

170. Donc, si connoissant les trois premiers termes d'une proportion, on vouloit déterminer le quatrième, il faudroit *multiplier le second par le troisième, et diviser le produit par le premier;* car le produit du second par le troisième est égal (168) au produit du premier par le quatrième; or il est certain, que si ayant ce dernier produit, on le divisoit par le premier terme, on auroit le quatrième (67); donc on aura également ce quatrième, en divisant, par le premier, le produit du second multiplié par le troisième.

Ainsi si on demande quel seroit le quatrième terme d'une proportion, dont les trois premiers seroient 3 : 8 :: 12, je multiplie 8 par 12, ce qui me donne 96 que je divise par 3; le quotient 32 est le quatrième terme demandé; en sorte que 3,8,12,32 forment une proportion: en effet, le premier rapport est $\frac{3}{8}$, et le second est $\frac{12}{32}$ qui (81), en divisant les deux termes par 4, est aussi $\frac{3}{8}$.

Digitized by Google

Par un semblable raisonnement, on voit qu'on peut trouver tout autre terme de la proportion, lorsqu'on en connoît trois. *Si le terme qu'on veut trouver est un des extrêmes, il faudra multiplier les deux moyens, et diviser par l'extrême connu : si, au contraire, on veut trouver un des moyens, il faudra multiplier les deux extrêmes, et diviser par le terme moyen connu.*

171. Cette propriété de l'égalité entre le produit des extrêmes et celui des moyens, ne peut appartenir qu'à quatre quantités en proportion géométrique. En effet, si on avoit quatre quantités qui ne fussent point en proportion géométrique; en multipliant les conséquens, par le rapport des deux premiers, il n'y auroit que le premier antécédent qui deviendroit égal à son conséquent; par exemple, si on avoit 3,12,5,10, en multipliant les conséquens 12 et 10, par la raison $\frac{1}{4}$ des deux premiers termes 3 et 12, on auroit 3,3,5,$\frac{10}{4}$, dans lesquels il est évident que le produit des extrêmes ne peut être égal à celui des moyens; donc ces produits ne pourroient pas être égaux non plus, quand même on n'auroit pas multiplié les conséquens par la raison $\frac{1}{4}$: il est visible que ce raisonnement peut s'appliquer à tous les cas.

Donc, *si quatre quantités sont telles que le produit des extrêmes soit égal au produit des moyens,*

Digitized by Google

ces quatre quantités sont en proportion. De-là nous conclurons cette seconde propriété des proportions.

172, *Si quatre quantités sont en proportion, elles y seront encore si on met les extrêmes à la place des moyens, et les moyens à la place des extrêmes.*

173. La même chose aura lieu; c'est-à-dire, *que la proportion subsistera si on échange les places des extrêmes, ou celles des moyens.*

En effet, dans tous ces cas, il est aisé de voir que le produit des extrêmes sera toujours égal à celui des moyens.

Ainsi la proportion 3 : 8 :: 12 : 32 peut fournir toutes les proportions suivantes par la seule permutation de ses termes.

3 : 8 :: 12 : 32
3 : 12 :: 8 : 32
32 : 12 :: 8 : 3
32 : 8 :: 12 : 3
8 : 3 :: 32 : 12
8 : 32 :: 3 : 12
12 : 3 :: 32 : 8
12 : 32 :: 3 : 8

Et il en est de même de toute autre proportion.

174. Puisqu'on peut mettre le troisième terme à la place du second, et réciproquement; on doit en conclure, *qu'on peut, sans troubler une pro-*

Digitized by Google

portion, multiplier ou diviser les deux antécédens par un même nombre, et qu'il en est de même à l'égard des conséquens; car, en faisant cette permutation, les deux antécédens de la proportion donnée formeroient le premier rapport, et les deux conséquens, le second. Et dans ce cas, on voit que c'est diviser les deux termes d'un rapport, chacun par un même nombre, ce qui, (160) ne change point ce rapport.

175. *Tout changement fait dans une proportion, de manière que la somme de l'antécédent et du conséquent, ou leur différence, soit comparée à l'antécédent ou au conséquent, de la même manière, dans chaque rapport, formera toujours une proportion.*

Par exemple, si on a la proportion

12 : 3 :: 32 : 8

On en pourra conclure les proportions suivantes

12 *plus* 3 : 3 :: 32 *plus* 8 : 8

ou 12 *moins* 3 : 3 :: 32 *moins* 8 : 8

ou 12 *plus* 3 : 12 :: 32 *plus* 8 : 32

ou 12 *moins* 3 : 12 :: 32 *moins* 8 : 32

Car, si c'est au conséquent que l'on compare, il est facile de voir que l'antécédent, augmenté ou diminué du conséquent, contiendra ce conséquent une fois de plus, ou une fois de moins qu'auparavant; et comme cette comparaison se fait de la même manière pour le second rapport, qui, par

la nature de la proportion, est égal au premier, il s'ensuit nécessairement que les deux nouveaux rapports seront aussi égaux entr'eux.

Si c'est à l'antécédent que l'on compare, le même raisonnement aura encore lieu, en concevant que dans la proportion sur laquelle on fait ce changement, on ait mis l'antécédent de chaque rapport à la place de son conséquent, et le conséquent à la place de l'antécédent; ce qui est permis (171).

176. Puisqu'en mettant le troisième terme d'une proportion à la place du second, et réciproquement, il y a encore proportion (172), on doit conclure que les deux antécédens se contiennent l'un l'autre, autant de fois que les conséquens se contiennent aussi l'un l'autre.

Donc *la somme des deux antécédens de toute proportion contient la somme des deux conséquens, ou est contenue en elle, autant qu'un des antécédens contient son conséquent, ou est contenu en lui.*

Par exemple, dans la proportion

12 : 3 :: 32 : 8

12 plus 32 : 3 plus 8 :: 32 : 8, ce qui est évident.

Mais pour s'en convaincre généralement, il n'y a qu'à faire attention que si le premier antécédent contient le second quatre fois, par exemple, la somme des deux antécédens contiendra le second

Digitized by Google

cinq fois; et par la même raison, la somme des conséquens contiendra le second conséquent, 5 fois : donc la somme des antécédens contiendra celle des conséquens comme le quintuple d'un des antécédens contient le quintuple de son conséquent; c'est-à-dire (160), comme un des antécédens contient son conséquent.

On prouveroit de même que la différence des antécédens est à la différence des conséquens, comme un antécédent est à son conséquent.

177. Il est évident que la proposition qu'on vient de démontrer, revient à celle-ci; si on a deux rapports égaux.

Par exemple celui de	4 : 12
et celui de	7 : 21
	11 : 33

On aura encore le même rapport, en ajoutant antécédent à antécédent, et conséquent à conséquent.

Donc, *si on a plusieurs rapports égaux, la somme de tous les antécédens est à la somme de tous les conséquens, comme l'un des antécédens est à son conséquent.*

Par exemple, si on a les rapports égaux 4 : 12 :: 7 : 21 :: 2 : 6, on peut dire que 4 *plus* 7 *plus* 2 sont à 12 *plus* 21 *plus* 6, comme 4 est à 12, ou comme 7 est à 21, etc.

Digitized by Google

Car après avoir ajouté entr'eux les antécédens des deux premiers rapports, et leurs conséquens aussi entr'eux, le nouveau rapport, qui, selon ce qu'on vient de voir, sera le même que chacun des deux premiers, sera aussi le même que le troisième ; par conséquent, on pourra l'ajouter de même avec celui-ci, et il en résultera encore un rapport égal, et ainsi de suite.

178. On appelle *Rapport composé* celui qui résulte de deux, ou d'un plus grand nombre de rapports, dont on multiplie les antécédens entr'eux et les conséquens entr'eux.

Par exemple, si on a les deux rapports 12 : 4 et 25 : 5, le produit des antécédens sera 300, celui des conséquens sera 20 ; le rapport de 300 à 20, est ce qu'on appelle *rapport composé des rapports de 12 à 4 et de 25 à 5.*

179. Ce rapport est le même que si on avoit évalué séparément chacun des rapports composans, et qu'on eût multiplié entr'eux les nombres qui expriment ces rapports ; en effet, le rapport de 12 à 4 est 3, celui de 25 à 5 est 5 ; or 3 fois 5 font 15, qui est le rapport de 300 à 20, et on peut voir que cela est général, en faisant attention que le rapport est mesuré (157) par une fraction qui a l'antécédent pour numérateur, et le conséquent pour dénominateur ; ainsi le rapport composé doit être une fraction, qui ait pour numéra-

teur le produit des deux antécédens, et pour dénominateur le produit des deux conséquens; c'est donc (97) le produit des deux fractions qui expriment les rapports composans.

180. Si les rapports que l'on multiplie sont égaux, le rapport composé est dit *rapport doublé*, si on n'a multiplié que deux rapports; *rapport triplé*, si on en a multiplié trois; *quadruplé*, si on en a multiplié quatre, et ainsi de suite.

181. *Si on a deux proportions, et qu'on les multiplie par ordre; c'est-à-dire, le premier terme de l'une par le premier terme de l'autre; le second par le second, et ainsi de suite; les quatre produits qui en résulteront seront en proportion.*

Car en multipliant ainsi deux proportions, c'est multiplier deux rapports égaux par deux rapports égaux; donc les deux rapports composés qui en résultent doivent être égaux; donc les quatre produits doivent être en proportion.

182. Concluons de-là que *les quarrés, les cubes, et en général les puissances semblables de quatre quantités en proportion, sont aussi en proportion*; puisque pour former ces puissances, il ne faut que multiplier la proportion par elle-même plusieurs fois de suite.

183. *Les racines quarrées, cubiques, et en général*

les racines semblables de quatre quantités en proportion, sont aussi en proportion ; car le rapport des racines quarrées des deux premiers termes, n'est autre chose que la racine quarrée du rapport de ces deux termes (157 et 135); il en est de même du rapport des racines quarrées des deux derniers termes; donc, puisque les deux rapports primitifs sont supposés égaux, leurs racines quarrées sont égales; donc le rapport des racines quarrées des deux premiers termes sera égal au rapport des racines quarrées des deux derniers. On prouvera de même pour les racines cubiques, quatrième, etc.

Usages des Propositions précédentes.

184. Les propositions que nous venons de démontrer, et qu'on appelle les *Règles de proportions*, ont des applications continuelles dans toutes les parties des Mathématiques. Nous nous bornerons ici à celles qui appartiennent à l'Arithmétique, et nous commencerons par celle qu'on peut déduire de ce qui a été établi (169) et qui est la base de presque toutes les autres.

De la Règle de Trois *directe et simple.*

185. On distingue plusieurs sortes de règles de *Trois;* elles ont toutes pour objet de faire connoître un terme d'une proportion dont on en connoît trois.

Celle qu'on appelle *Règle de Trois directe et simple*, est nommée *simple*, parce que l'énoncé des questions auxquelles on l'applique, ne renferme jamais plus de quatre quantités, dont trois sont connues, et la quatrième est à trouver.

On l'appelle *directe*, parce que des quatre quantités qu'on y considère, il y en a toujours deux, qui non-seulement sont relatives aux deux autres, mais qui en dépendent de manière que de même qu'une des quantités contient l'autre, ou est contenue en elle, de même aussi la quantité relative à la première, contient la quantité relative à la seconde, ou est contenue en elle; c'est-à-dire d'une manière plus abrégée, qu'une quantité et sa relative peuvent toujours être toutes deux ou antécédens ou conséquens dans la proportion. Dans ce cas, les deux quantités principales sont dites *directement proportionnelles* à leurs relatives.

Exemple I.

40 Ouvriers ont fait, en un certain temps, 268 toises d'ouvrage ; on demande combien 60 ouvriers en pourroient faire dans le même temps ?

Il est clair que le nombre des toises doit augmenter à proportion du nombre des ouvriers ; en sorte que celui-ci devenant double, triple, quadruple, etc. le premier doit devenir aussi double, triple, quadruple, etc. Ainsi l'on voit que le nombre des toises cherché doit contenir les 268 toises, autant que le nombre 60 relatif au premier,

Digitized by Google

contient le nombre 40 relatif au second : il faut donc chercher le quatrième terme d'une proportion qui commenceroit par ces trois-ci,

$$40 : 60 :: 268^{t} :$$

ou [en divisant ces deux premiers termes par 20, ce qui est permis (160)] par ces trois autres,

$$2 : 3 :: 268^{t} :$$

Ainsi, selon qu'il a été dit (169) je multiplie $268^{t.}$ par 3, et je divise le produit 804 par 2, ce qui donne pour quotient $402^{t.}$, et par conséquent 402 toises pour l'ouvrage que feroient les 60 ouvriers.

EXEMPLE II.

Un équipage d'Artillerie a fait 34 lieues en 6 jours, on demande en combien de temps il en feroit 255 dans les mêmes circonstances?

Il est évident qu'il faut plus de temps à proportion du nombre de lieues, et que par conséquent le nombre de jours cherché doit contenir 6 jours, autant que 255 lieues contiennent 34 : il faut donc chercher le quatrième terme d'une proportion qui commenceroit par ces trois-ci,

$$34 : 255 :: 6 :$$

Multipliant 255 par 6, et divisant le produit 1530 par 34, on aura 45 jours.

EXEMPLE III.

$52^{t.}\ 4^{pi.}\ 5^{po.}$ d'ouvrage ont été payées $168^{\#}\ 9^{f}\ 4^{d}$; on demande combien on doit payer pour $77^{t.}\ 1^{pi.}\ 8^{po.}$?

Le prix de $77^{t.}\ 1^{pi.}\ 8^{po.}$ doit contenir le prix $168^{\#}\ 9^{f}\ 4^{d}$ des $52^{t.}\ 4^{pi.}\ 5^{po.}$, autant que $77^{t.}\ 1^{pi.}\ 8^{po.}$ contiennent $52^{t.}\ 4^{pi.}\ 5^{po.}$. Il faut donc chercher le quatrième terme d'une Proportion qui commenceroit par ces trois-ci,

$$52^{t.}\ 4^{pi.}\ 5^{po.} : 77^{t.}\ 1^{pi.}\ 8^{po.} :: 168^{\#}\ 9^{f}\ 4^{d} :$$

c'est-

Digitized by Google

c'est-à-dire qu'il faut multiplier $168^{tt}\ 9^{s}\ 4^{d}$ par $77^{t.}\ 1^{pi.}\ 8^{po.}$, et diviser le produit par $52^{t.}\ 4^{pi.}\ 5^{po.}$, ce qu'on peut faire par ce qui a été dit (116 et 122).

Mais il sera encore plus simple de réduire les deux premiers termes à leur plus petite espèce, c'est-à-dire, en pouces, et la question sera réduite à chercher le quatrième terme d'une proportion qui commenceroit par ces trois autres.

$$3797 : 5564 :: 168^{tt}\ 9^{s}\ 4^{d} :$$

alors multipliant $168^{tt}\ 9^{s}\ 4^{d}$ par 5564, on aura $937348^{tt}\ 10^{s}\ 8^{d}$; et divisant par 3797, le quotient $246^{tt}\ 17^{s}\ 3^{d}\ \frac{2789}{3797}$ sera ce qu'on doit payer pour les $77^{t.}\ 1^{pi.}\ 8^{po.}$

S'il y avoit des fractions ; après avoir réduit les deux termes de même espèce, à leur plus petite unité, comme dans cet exemple, on simplifieroit le rapport de ces deux termes de la manière qui a été enseignée (161).

De la Règle de Trois *inverse et simple.*

186. La règle de *Trois inverse et simple* diffère de la règle de Trois directe, dont nous venons de parler, en ce que, des quatre quantités qui entrent dans l'énoncé de la question pour laquelle on fait cette opération, l'une des quantités contient la seconde de même espèce, comme la quantité relative à la première, est au contraire contenue dans celle qui est relative à la seconde; en sorte que, lorsque par l'examen de la question, on a donné à ces quantités la disposition convenable pour former une proportion, l'une des deux quantités principales et sa

relative forment les extrêmes, tandis que l'autre quantité principale et sa relative forment les moyens. Dans ce cas, on dit que les deux quantités principales, sont *réciproquement proportionnelles* à leurs relatives.

Au reste, cela n'introduit aucune différence dans la manière de faire l'opération ; c'est toujours le quatrième terme d'une proportion qu'il s'agit de trouver, ou du moins on peut toujours amener la chose à ce point.

Quelques Arithméticiens ont prescrit pour le cas présent, une règle assujettie à l'énoncé de la question : nous ne suivrons point leur exemple ; c'est la nature de la question, et non pas son énoncé (qui souvent est vicieux) qui doit diriger dans la résolution.

EXEMPLE I.

30 hommes ont fait un certain ouvrage en 25 jours, combien faudroit-il d'hommes pour faire le même ouvrage en 10 jours? on voit qu'il faut, dans ce second cas, d'autant plus d'hommes que le nombre de jours est moindre ; ainsi le nombre d'hommes cherché doit contenir le nombre de 30 hommes, autant que le nombre 25 de jours, relatif à ceux-ci, contient le nombre 10 de jours, relatif à ceux-là. Il ne s'agit donc que de trouver le quatrième terme d'une proportion qui commenceroit par ces trois-ci,

$$10^{j.} : 25^{j.} :: 30^{ho.}$$

c'est-à-dire, de multiplier 30 par 25, et de diviser le produit 750 par 10, ce qui donne 75 ou $75^{ho.}$.

Digitized by Google

EXEMPLE. II.

Le pied de Londres étant au pied de Roi :: 15 : 16, on demande combien 720 pieds de Londres font de pieds de Roi ?

Il est clair que pour mesurer une longueur déterminée, il faudra moins de pieds de Roi que de pieds de Londres, dans le même rapport que cette première mesure est, au contraire, plus grande que la seconde ; en sorte que la question se réduit à calculer le quatrième terme d'une proportion qui commenceroit par ces trois-ci,

16 : 15 :: 720 :

Multipliant donc 720 par 15, et divisant par 16, on aura 675 pour le nombre de pieds de Roi qui équivalent à 720 pieds de Londres.

EXEMPLE III.

Un convoi peut faire un certain espace en 18 jours, en marchant 5 heures par jour ; mais on voudroit le faire arriver en 12 jours, abstraction faite des séjours ; on demande combien d'heures il doit marcher par jour ?

Il est évident qu'il doit, chaque jour, marcher pendant un nombre d'heures d'autant plus considérable que 5 heures, que le nombre 12 des jours qu'il doit employer, est plus petit, au contraire, que le nombre 18 des jours qu'il auroit employés si l'on n'eut pas forcé la marche. Ainsi l'état de la question fait voir qu'il s'agit de calculer le quatrième terme d'une proportion qui commenceroit par ces trois-ci,

12 : 18 :: 5 :

Multipliant donc 18 par 5, et divisant par 12, on a $7^{h.}\frac{1}{2}$ pour le nombre d'heures pendant lesquelles le convoi doit marcher chaque jour.

De la Règle de Trois composée.

187. Dans les deux règles de Trois que nous venons d'exposer, la quantité cherchée et la quantité de même espèce qui entre dans l'énoncé de la question, ont entr'elles un rapport simple et déterminé par celui des deux autres quantités qui entrent pareillement dans l'énoncé de la question.

Dans la règle de Trois composée, le rapport de la quantité cherchée à la quantité de même espèce qui entre dans l'énoncé de la question, n'est pas donné par le rapport simple de deux autres quantités seulement, mais par plusieurs rapports simples qu'il s'agit de composer (177) d'après l'examen de la question.

Quand une fois ces rapports ont été composés, la règle est réduite à une règle de Trois simple : les exemples suivans vont éclaircir ce que nous venons de dire.

EXEMPLE I.

30 hommes ont fait 132 toises d'ouvrage en 18 jours, combien 54 hommes en feront-ils en 28 jours ?

On voit que l'ouvrage dépend ici, non-seulement du nombre des hommes, mais encore du nombre des jours.

Pour avoir égard à l'un et à l'autre, il faut considérer que 30 hommes travaillant pendant 18 jours, ne font qu'autant que dix-huit fois 30 hommes, c'est-à-dire, que 540 hommes qui travailleroient pendant un jour.

Digitized by Google

Pareillement, 54 hommes travaillant pendant vingt-huit jours, ne font qu'autant que feroient vingt-huit fois 54 hommes, ou 1512 hommes travaillant pendant un jour.

La question est donc changée en celle-ci : 540 hommes ont fait 132 toises d'ouvrage, combien 1512 hommes en feroient-ils dans le même temps? c'est-à-dire, qu'il faut chercher le quatrième terme d'une proportion qui commenceroit par ces trois-ci,

$$540^{h.} : 1512^{h.} :: 132^{t.}$$

Multipliant 1512 par 132, et divisant le produit par 540, on trouvera pour réponse à la question, $369^{t.}\ 3^{pi.}\ 7^{po.}\ 2^{li.}\ \frac{2}{5}$.

Exemple II.

Un homme marchant 7 heures par jour, a mis 30 jours à faire 230 lieues; s'il marchoit 10 heures par jour, combien emploieroit-il de jours pour faire 600 lieues, allant toujours avec la même vîtesse?

S'il marchoit pendant le même nombre d'heures par jour, dans chaque cas, on voit qu'il emploieroit d'autant plus de jours qu'il a plus de chemin à faire; mais comme il marche pendant un plus grand nombre d'heures chaque jour dans le second cas, il lui faudra moins de temps par cette raison; ainsi l'opération tient en partie à la règle de Trois directe, et à la règle de Trois inverse.

On la réduira à une règle de trois simple, en considérant que marcher pendant 30 jours, en employant 7 heures chaque jour, c'est marcher pendant 30 fois 7 heures, ou 210 heures; ainsi on peut changer la question en cette autre; il a fallu 210 heures pour faire 230 lieues combien en faudra-t-il pour faire 600 lieues? Quand on aura trouvé le

nombre d'heures qui satisfait à cette question, en le divisant par 10, on aura le nombre de jours demandé, puisque l'homme dont il s'agit emploie dix heures par jour.

Ainsi il faut chercher le quatrième terme de la proportion, dont les trois premiers sont

$$230^{l.} : 600^{l.} :: 210^{h.}$$

On trouvera que ce quatrième terme est 547 heures et $\frac{19}{23}$, lesquelles divisées par 10, nombre des heures que cet homme emploie chaque jour, donnent 54 jours et $\frac{180}{230}$ ou $54^{j.}\ \frac{18}{23}$.

De la Règle de Société.

188. La règle de Société est ainsi nommée, parce qu'elle sert à partager, entre plusieurs associés, le bénéfice ou la perte résultant de leur société.

Son but est de partager un nombre proposé, en parties qui aient entr'elles des rapports donnés.

La règle que l'on donne pour cet effet, est fondée sur ce que nous avons établi (176); nous allons la déduire de ce principe dans l'exemple suivant.

EXEMPLE I.

Supposons, par exemple, qu'il s'agisse de partager 120, en trois parties qui aient entr'elles les mêmes rapports que les nombres 4, 3, 2; l'énoncé de la question fournit ces deux proportions,

4 : 3 :: la première partie est à la seconde.

4 : 2 :: la première partie est à la troisième.

Digitized by Google

ou (172) ces deux autres,

4 est à la première partie :: 3 est à la seconde.

4 est à la première partie :: 2 est à la troisième.

De sorte qu'on a ces trois rapports égaux. 4 est à la première partie :: 3 est à la seconde :: 2 est à la troisième.

Or on a vu (176) que la somme des antécédens de plusieurs rapports égaux, est à la somme des conséquens, comme un antécédent est à son conséquent ; on peut donc dire ici, que la somme 9 des trois parties proportionnelles à celle que l'on cherche, est à la somme 120 de celles-ci, comme l'une quelconque des trois parties proportionnelles est à la partie de 120 qui lui répond.

La règle se réduit donc, 1°. à faire une totalité des parties proportionnelles données ; 2°. à faire autant de règles de Trois qu'il y a de parties à trouver, et dont chacune aura, pour premier terme, la somme des parties proportionnelles données, pour second terme le nombre proposé à diviser, et pour troisième terme l'une des parties proportionnelles données ; ainsi dans la question que nous avons prise pour exemple, on auroit ces trois règles de Trois à faire,

9 : 120 :: 4 :
9 : 120 :: 3 :
9 : 120 :: 2 :

dont on trouvera que les quatrièmes termes sont $53 \frac{1}{3}$, 40, $26 \frac{2}{3}$ qui ont entr'eux les rapports demandés, et qui composent en effet le nombre 120.

Au reste, il est aisé de remarquer qu'il n'est pas absolument nécessaire de faire autant de régles de Trois qu'il y a de parties à trouver : on peut se dispenser de la dernière, en retranchant du nombre proposé, la somme des autres parties quand on les a trouvées.

EXEMPLE II.

On doit distribuer à l'île de Ré, à Belle-Isle et au Port-Louis, un approvisionnement d'outils, savoir, 4500 bêches, 2500 pics-hoyaux, 4550 pioches, 820 pics-à-tête, 820 pics-à-toc, 2200 escoupes, 2210 serpes et 800 haches. Cette distribution doit être faite, pour chaque espèce d'outils, proportionnellement et conformément à un modèle d'approvisionnement par lequel on voit que sur 8500 outils de même espèce, l'île de Ré en a eu 6000, Belle-Isle 1400, et le Port-Louis 1100. On demande combien il en faut de chaque espèce, pour chacun de ces endroits ?

Modèle d'Approvisionnement.

L'ÎLE DE RÉ.	6000.
BELLE-ISLE.	1400.
PORT-LOUIS.	1100.
	8500.

Puisque chaque espèce d'outils doit être distribuée proportionnellement aux nombres 6000, 1400 et 1100, on

trouvera combien chaque endroit en doit avoir d'une espèce quelconque, par exemple, de bêches, en calculant le quatrième terme de chacune de ces trois proportions,

8500 : 4500 ou 85 : 45 :: 6000 :
85 : 45 :: 1400 :
85 : 45 :: 1100 :

On s'y prendra de la même manière pour calculer le nombre de pics-hoyaux, de pioches, etc., qui doivent être distribués dans chaque endroit ; et l'on trouvera que la distribution doit être faite comme il suit.

	OUTILS		
	pour L'ILE DE RÉ.	pour BELLE-ISLE.	pour PORT-LOUIS.
4500 Bêches......	3177.	741.	582.
2500 Pics-hoyaux.	1765.	412.	323.
4550 Pioches.....	3212.	749.	589.
820 Pics-à-tête...	579.	135.	106.
820 Pics-à-roc....	579.	135.	106.
2200 Escoupes.....	1553.	362.	285.
2210 Serpes.......	1560.	364.	286.
800 Haches......	565.	132.	103.
18400.	12990.	3030.	2380.

EXEMPLE III.

Trois bateliers doivent faire entr'eux le décompte de 1500 livres. La premier s'étoit chargé de 2 milliers qu'il a conduit à 50 lieues ; le second a conduit 15 quintaux à 75 lieues ; et le troisième 3 milliers à 60 lieues. On demande ce qui revient à chacun.

Digitized by Google

Pour réduire cette question à la règle précédente, il faut réduire ces différens transports, à une même distance, en cette manière.

2 milliers portés à 50 lieues, doivent être payés comme 50 fois 2 milliers ou 100 milliers portés à une lieue. Pareillement 15 quintaux ou 1 millier et demi porté à 75 lieues, sera payé comme 75 fois 1 millier et demi, ou 112 $\frac{1}{2}$ milliers portés à une lieue. Enfin 3 milliers portés à 60 lieues doivent être payés comme 60 fois trois milliers, ou 180 milliers portés à une lieue.

Ainsi la question est la même que si les trois voituriers avoient porté à la même distance, le premier 100 milliers, le second 112 $\frac{1}{2}$ milliers, et le troisième 180 milliers. Il s'agit donc de partager 1500 livres en trois parts proportionnelles aux nombres 100, 112 $\frac{1}{2}$ et 180, en calculant le quatrième terme de chacune des trois proportions suivantes.

$392\frac{1}{2} : 1500 :: 100 : 382^{\#}\ 3^{s}\ 4^{d}$

$392\frac{1}{2} : 1500 :: 112\frac{1}{2} : 429.\ 18.\ 9.$

$392\frac{1}{2} : 1500 :: 180 : 687.\ 17.\ 11.$

EXEMPLE IV.

Le parc d'une armée consiste en 156 pièces de canon. On veut partager cette armée en trois divisions, de manière que la force de la première division soit à celle de la seconde :: 5 : 4, et que celle de la première soit à celle de la troisième :: 7 : 3. Il s'agit de répartir l'artillerie proportionnellement aux forces que doivent avoir les trois divisions.

Comme la force de la première division est représentée par 5 dans le premier rapport, et par 7 dans le second, il faut, avant tout, la ramener à être représentée par le

Digitized by Google

même nombre ; ce que l'on fera facilement, en multipliant les deux termes du premier rapport par 7, et les deux termes du second par 5, ce qui ne change point ces rapports. Alors les forces de la première, seconde et troisième division doivent être respectivement comme les nombres 35, 28 et 15. Il s'agit donc de partager 156 en trois parties proportionnelles aux nombres 35, 28 et 15, ce qui s'exécute comme dans le premier exemple, et donne 70, 56 et 30.

Des Progressions Arithmétiques.

189. La Progression Arithmétique est une suite de termes, dont chacun surpasse celui qui le précède, ou en est surpassé, de la même quantité.

Par exemple, cette suite. . . . .

$\div$ 1 . 4 . 7 . 10 . 13 . 16 . 19 . 22 . 25, etc.

est une Progression Arithmétique, parce que chaque terme y surpasse celui qui le précède, d'une même quantité qui est ici 3.

Les deux points séparés par une barre qu'on voit ici à la tête de la progression, sont destinés à marquer, qu'en énonçant cette progression, on doit répéter chaque terme, excepté le premier et le dernier, en cette manière 1 *est à* 4, *comme* 4 *est à* 7, *comme* 7 *est à* 10, etc.

La progression est dite *croissante* ou *décroissante*, selon que les termes vont en augmentant ou en diminuant ; mais comme les propriétés de l'une

et de l'autre sont les mêmes, en changeant seulement les mots *plus* en *moins*, et *ajouter* en *soustraire*, nous la considérerons ici uniquement comme croissante.

190. On voit donc, d'après la définition de la Progression Arithmétique, qu'avec le premier terme et la différence commune, ou la raison de la progression, on peut former tous les autres termes, en ajoutant consécutivement cette raison, et que par conséquent

Le second terme est composé du premier plus la raison.

Le troisième, composé du second plus la raison, et par conséquent du premier plus deux fois la raison.

Le quatrième, composé du troisième plus la raison, et par conséquent du premier plus trois fois la raison, et ainsi de suite.

191. De sorte qu'on peut dire en général qu'*un terme quelconque d'une progression arithmétique est composé du premier plus autant de fois la raison qu'il y a de termes avant lui.*

192. Donc, si le premier terme étoit zéro, tout autre terme de la progression seroit égal à autant de fois la raison qu'il y auroit de termes avant lui.

Digitized by Google

193. Ce principe peut avoir les deux applitions suivantes :

1°. Il sert à trouver un terme quelconque d'une progression, sans qu'on soit obligé de calculer ceux qui le précèdent : qu'on demande, par exemple, quel seroit le 100e. terme de cette progression . . . .

÷ 4 . 9 . 14 . 19 . 24, etc.

Puisque ce terme cherché doit être le centième, il a donc 99 termes avant lui ; il est donc composé du premier terme 4 et de 99 fois la raison 5 ; il est donc 4 plus 495 ; c'est-à-dire, 499.

194. 2°. Ce même principe sert à lier deux nombres quelconques, par une suite de tant d'autres nombres qu'on voudra, de manière que le tout forme une progression arithmétique ; ce qu'on appelle *insérer* entre deux nombres donnés, plusieurs *moyens proportionnels arithmétiques*, ou simplement plusieurs *moyens arithmétiques*.

Par exemple, on peut lier 1 et 7 par cinq nombres qui fassent une progression arithmétique avec 1 et 7 ; ces nombres sont 2, 3, 4, 5, 6 ; mais comme il n'est pas toujours aisé de voir, du premier coup-d'œil, quels doivent être ces nombres, voici comment on peut les trouver à l'aide du principe que nous venons de poser.

Il ne s'agit que de trouver la raison qui doit régner dans cette progression.

Or le plus grand des deux nombres proposés, devant être le dernier terme de la progression, doit être composé du premier ; c'est-à-dire, du plus petit de ces deux nombres, plus autant de fois la raison qu'il y a de termes avant lui ; donc, si du plus grand de ces deux nombres on retranche le plus petit, le reste sera composé d'autant de fois la raison qu'il doit y avoir de termes avant le plus grand ; c'est-à-dire, qu'il est le produit de la multiplication de cette raison par le nombre des termes qui précèdent le plus grand ; donc (67) si on divise ce reste par le nombre des termes qui doivent précéder le plus grand, on aura cette raison.

Or le nombre des termes qui doivent précéder le plus grand, est plus grand d'une unité que le nombre des moyens qu'on veut insérer entre les deux ; donc, *pour insérer entre deux nombres donnés, tant de moyens arithmétiques qu'on voudra, il faut retrancher le plus petit de ces deux nombres, du plus grand, et diviser le reste par le nombre des moyens augmenté d'une unité.* Le quotient sera la différence ou la raison qui doit régner dans la progression.

Par exemple, si entre 4 et 11, on demande d'insérer 8 moyens arithmétiques ; je retranche 4 de 11, il me reste 7

Digitized by Google

que je divise par 9 nombre des moyens augmenté de l'unité ; le quotient $\frac{7}{9}$ est la différence qui doit régner dans la progression qui sera par conséquent. . . . .

$$\div\ 4 \,.\, 4\tfrac{7}{9} \,.\, 5\tfrac{5}{9} \,.\, 6\tfrac{3}{9} \,.\, 7\tfrac{1}{9} \,.\, 7\tfrac{8}{9} \,.\, 8\tfrac{6}{9} \,.\, 9\tfrac{4}{9} \,.\, 10\tfrac{2}{9} \,.\, 11.$$

Pareillement, si on demandoit neuf moyens arithmétiques entre 0 et 1 ; retranchant 0 de 1, il reste 1 qu'il faudroit diviser par 10, nombre des moyens augmenté de l'unité ; ce qui donne $\frac{1}{10}$ ou 0,1 pour la raison, et par conséquent la progression sera $\div$ 0 . 0,1 . 0,2 . 0,3 . 0,4 . 0,5 . 0,6 . 0,7 . 0,8 . 0,9 . 1.

195. On voit par-là, qu'entre deux nombres, si voisins qu'ils puissent être l'un de l'autre, on peut toujours insérer tant de moyens arithmétiques qu'on voudra.

Nous n'en dirons pas davantage sur les progressions arithmétiques que nous ne traitons ici que par rapport aux Logarithmes dont nous parlerons plus bas ; nous aurons occasion d'y revenir ailleurs.

Des Progressions Géométriques.

196. La Progression Géométrique est une suite de termes, dont chacun contient celui qui le précède, ou est contenu en lui, le même nombre de fois ; par exemple, cette suite . . . . .

$$\div\!\div\ 3 : 6 : 12 : 24 : 48 : 96 : 192$$

est une progression géométrique, parce que chaque

terme contient celui qui le précède, le même nombre de fois qui est ici 2.

Ce nombre de fois est ce qu'on appelle *la raison* de la progression.

Les quatre points qui précèdent la progression, ont la même signification que les deux points qui précèdent la progression arithmétique (188).

La progression est dite *croissante* ou *décroissante*, selon que les termes vont en augmentant ou en diminuant.

Nous considérerons toujours la progression géométrique comme croissante, parce que les propriétés sont les mêmes dans l'une et dans l'autre, en changeant le mot de *multiplier* en celui de *diviser*, et celui de *contenir* en ceux de *être contenu*.

Puisque le second terme contient le premier autant de fois qu'il y a d'unités dans la raison, il est donc composé du premier, multiplié par la raison.

Puisque le troisième terme contient le second autant de fois qu'il y a d'unités dans la raison, il est donc composé du second, multiplié par la raison, et par conséquent du premier multiplié par la raison, et encore multiplié par la raison; c'est-à-dire, du premier multiplié par le quarré, ou la seconde puissance de la raison.

Puisque le quatrième terme contient le troisième autant de fois qu'il y a d'unités dans la raison,

Digitized by Google

raison, il est donc composé du troisième multiplié par la raison, et par conséquent du premier multiplié par le quarré de la raison, et encore multiplié par la raison; c'est-à-dire, multiplié par le cube, ou la troisième puissance de la raison.

Par exemple, dans *la progression ci-dessus*, 6 est composé du premier terme 3, multiplié par la raison 2; 12 est composé du premier terme 3, multiplié par le quarré 4 de la raison 2; 24 est composé du premier terme 3, multiplié par le cube 8 de la raison 2.

197. En continuant le même raisonnement, on voit qu'*un terme quelconque de la progression géométrique, est composé du premier multiplié par la raison élevée à une puissance marquée par le nombre des termes qui précèdent ce terme quelconque.* Donc si le premier terme de la progression est l'unité, chaque autre terme sera formé de la raison même, élevée à une puissance marquée par le nombre des termes qui le précèdent; car la multiplication par le premier terme qui est l'unité, n'augmente point le produit.

Pour élever un nombre à une puissance proposée; à la septième, par exemple, il faut, suivant l'idée que nous avons donnée des puissances, multiplier ce nombre par lui-même six fois consécutives; ainsi pour élever 2 à la septième puissance, je dirois 2 fois 2 font 4, 2 fois 4 font 8,

Digitized by Google

2 fois 8 font 16, 2 fois 16 font 32, 2 fois 32 font 64, 2 fois 64 font 128, qui seroit la septième puissance de 2; mais on peut abréger l'opération en diverses manières; par exemple, je puis d'abord quarrer 2, ce qui fait 4, cuber ce 4, ce qui donne 64, et le multiplier par 2, ce qui fait 128; ou bien je puis cuber 2, ce qui donne 8; quarrer 8, ce qui donne 64; et multiplier 64 par 2, ce qui donne 128; en un mot, peu importe de quelle façon on s'y prenne, pourvu que 2 se trouve 7 fois facteur dans le produit.

198. Le principe que nous venons de poser (196) sur la formation d'un terme quelconque de la progression, et la remarque que nous venons de faire, peuvent servir à calculer tel terme qu'on voudra de la progression, sans être obligé de calculer ceux qui le précèdent: si on demande, par exemple, quel seroit le douzième terme de la progression. . . . . . .

$$\div\div 3 : 6 : 12 : 24, \text{ etc.}$$

Comme je sais (196) que ce douzième terme doit être composé du premier multiplié par la raison élevée à une puissance marquée par le nombre des termes qui précèdent ce douzième; je vois que, pour le former, il faut multiplier 3 par la onzième puissance de la raison 2; pour former cette onzième puissance, je cube 2, ce qui me donne 8; je cube 8, ce qui me donne 512 pour la neuvième puissance; et enfin je multiplie 512, neuvième puissance de la raison, par 4,

seconde puissance, et j'ai 2048 pour la onzième puissance de 2; je multiplie donc 2048 par 3, et j'ai 6144 pour le douzième terme de la progression.

199. Une autre application qu'on peut faire du même principe, c'est pour trouver tant de moyens proportionnels géométriques qu'on voudra entre deux nombres donnés. Si on demandoit trois moyens géométriques entre 4 et 64; avec un peu d'attention on voit que ces trois moyens géométriques sont 8, 16, 32; en effet, ∺ 4 : 8 : 16 : 32 : 64, forment une progression géométrique; mais si on proposoit d'autres nombres que 4 et 64, ou que l'on demandât tout autre nombre de moyens géométriques, on ne les trouveroit pas aussi facilement.

Or voici comment on peut les trouver en vertu du principe dont il s'agit.

La question se réduit à trouver la raison qui doit régner dans la progression, parce que, quand elle sera trouvée, on formera aisément les termes par des multiplications successives par cette raison.

Qu'il soit question, par exemple, de trouver neuf moyens géométriques entre 2 et 2048.

2048 sera donc le dernier terme d'une progression géométrique qui commence par 2, et qui doit avoir neuf termes entre le premier et le dernier; 2048 est donc composé du premier terme 2,

Digitized by Google

multiplié par la raison élevée à une puissance marquée par le nombre des termes qui doivent précéder 2048; donc (67), si on divise 2048 par le premier terme, le quotient sera la raison élevée à une puissance marquée par le nombre des termes qui doivent précéder 2048; donc, en cherchant quelle est la racine de cette puissance, on aura la raison : or, cette puissance doit être la dixième, puisque devant y avoir neuf termes entre 2 et 2048, il y en a nécessairement dix avant 2048; donc il faut extraire la racine dixième du quotient qu'aura donné le plus grand nombre 2048, divisé par le plus petit 2.

200. Comme on peut faire le même raisonnement dans tous les cas, concluons donc en général que, *pour insérer entre deux nombre donnés, tant de moyens géométriques qu'on voudra, il faut diviser le plus grand de ces deux nombres par le plus petit, ce qui donnera un quotient; on extraira, de ce quotient, une racine du degré marqué par le nombre des moyens augmenté de l'unité.*

Ainsi, pour revenir à notre exemple, je divise 2048 par 2, ce qui me donne 1024, dont je cherche la racine dixième (*); elle est 2; donc la

(*) Nous n'avons pas donné de méthode pour extraire la racine dixième d'un nombre, mais il en est de celle-ci comme de la racine quarrée et de la racine cubique : la racine quarrée ne doit avoir qu'un chiffre, lorsque le nombre pro-

raison est 2; ainsi pour former les moyens en question, je multiplie le premier terme 2, continuellement par la raison 2; et après avoir formé neuf moyens, je tombe sur 2048, comme on le voit ici. . . . .

∺ 2 : 4 : 8 : 16 : 32 : 64 : 128 : 256 : 512 : 1024 : 2048.

Pareillement, si on demandoit de trouver quatre moyens géométriques entre 6 et 48, je diviserois 48 par 6, et du quotient 8 je tirerois la racine 5ᵉ; comme 8 n'a point de racine 5ᵉ exacte, on ne peut jamais assigner exactement en nombres, quatre moyens géométriques entre 6 et 48; mais on peut approcher de cette racine si près qu'on le voudra, par une méthode analogue à celles de la racine quarrée et de la racine cubique, et que nous ferons connoître dans l'Algèbre. En attendant, il suffit qu'on conçoive, qu'il est possible de trouver un nombre qui, multiplié quatre fois par lui-même, approche de plus en plus de reproduire 8, et qu'il en est de même pour tout

posé n'en a pas plus de 2; la racine cubique ne doit avoir qu'un chiffre, lorsque le nombre proposé n'en a pas plus de trois; pareillement la racine dixième n'aura jamais qu'un chiffre, tant que le nombre proposé n'en aura pas plus de 10; il en est de même pour les autres racines, la trentième, par exemple, n'aura qu'un chiffre, si le nombre proposé n'a pas plus de trente chiffres; cela se démontre, comme on l'a fait pour la racine quarrée et la racine cubique.

autre nombre et pour toute autre racine; et de-là nous conclurons qu'entre deux nombres quelconques, on peut toujours trouver tant de moyens géométriques qu'on voudra, soit exactement, soit par une approximation poussée à tel degré qu'on voudra, et c'est tout ce qu'il nous faut pour passer aux logarithmes.

Des Logarithmes.

201. Les *Logarithmes* sont des nombres en progression arithmétique, qui répondent terme pour terme à une pareille suite de nombres en progression géométrique. Si on a, par exemple, la progression géométrique et la progression arithmétique suivantes,

$$\div\!\!\div\ 2 : 4 : 8 : 16 : 32 : 64 : 128 : 256,\ etc.$$
$$\div\ 3 \,.\, 5 \,.\, 7 \,.\, 9 \,.\, 11 \,.\, 13 \,.\, 15 \,.\, 17,\ etc.$$

Chaque terme de la suite inférieure est dit le logarithme du terme qui est à pareille place dans la suite supérieure.

202. Un même nombre peut donc avoir une infinité de logarithmes différens, puisqu'à la même progression géométrique on peut faire correspondre une infinité de progressions arithmétiques différentes.

Digitized by Google

Comme nous ne considérons ici les logarithmes que par rapport à l'usage qu'on peut en faire dans les calculs numériques, nous ne nous arrêterons pas à considérer les différentes progressions géométriques et arithmétiques qu'on pourroit comparer entr'elles ; nous passons tout de suite à celles qu'on a considérées dans la formation des Tables de logarithmes.

203. On a choisi pour progression géométrique, la progression décuple, et pour progression arithmétique la suite naturelle des nombres ; c'est-à-dire, qu'on a choisi les deux progressions suivantes,

∷ 1 : 10 : 100 : 1000 : 10000 : 100000 : 1000000

÷ 0 . 1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6

Ainsi il sera toujours aisé de reconnoître quel est le logarithme d'un nombre exprimé par l'unité suivie de tant de zéros qu'on voudra ; il a toujours autant d'unités qu'il y a de zéros à la suite de cette unité.

204. Quant aux logarithmes des nombres intermédiaires aux termes de la progression décuple, voici comment on parviendroit à les déterminer si l'on n'avoit d'autres moyens que ceux que l'Arithmétique seule peut fournir.

205. D'après la définition que nous avons donnée des logarithmes, on voit que pour avoir le logarithme d'un nombre quelconque, de 3, par

exemple, il faut que ce nombre puisse faire partie de la progression géométrique fondamentale. Or, quoiqu'on ne voit pas que 3 puisse faire partie de la progression géométrique ∺ 1 : 10 : 100, etc. cependant on voit que si, entre 1 et 10, on inséroit un très-grand nombre de moyens géométriques (199); comme on monteroit alors de 1 à 10 par des degrés d'autant plus serrés que le nombre de ces moyens seroit plus grand, il arriveroit de deux choses l'une; ou que quelqu'un de ces moyens se trouveroit être précisément le nombre 3, ou du moins il s'en trouveroit deux consécutifs entre lesquels le nombre 3 seroit compris, et dont chacun différeroit d'autant moins de 3, que le nombre des moyens insérés seroit plus grand.

Cela posé, si on inséroit pareillement entre 0 et 1 autant de moyens arithmétiques qu'on a inséré de moyens géométriques entre 1 et 10, chaque terme de la progression géométrique ayant pour logarithme le terme correspondant de la progression arithmétique, on prendroit dans celle-ci, pour logarithme de 3, le nombre qui s'y trouveroit à pareille place que 3 se trouve dans la progression géométrique; ou si 3 n'étoit pas exactement quelqu'un des termes de celle-ci, on prendroit dans la progression arithmétique, le terme qui répondroit à celui de la progression géométrique, qui approche le plus du nombre 3.

Digitized by Google

C'est ainsi qu'on pourroit s'y prendre en effet, si l'on n'avoit d'autres expédiens que ceux quepeut fournir l'Arithmétique. Quoi qu'il en soit, c'est à cela que revient le calcul des logarithmes.

206. Il faut donc se représenter qu'ayant inséré 10000000 moyens géométriques entre 1 et 10, pareil nombre entre 10 et 100, pareil nombre entre 100 et 1000, etc. on a inséré aussi pareil nombre de moyens arithmétiques entre 0 et 1, pareil nombre entre 1 et 2, pareil nombre entre 2 et 3; qu'ayant rangé tous les premiers sur une même ligne, et tous les seconds au-dessous, on a cherché dans la première le nombre le plus approchant de 3, et on a pris dans la suite inférieure le nombre correspondant; qu'on a cherché de même dans la première, le nombre le plus approchant de 2, et qu'on a pris dans la suite inférieure le nombre correspondant; qu'on en a fait de même successivement pour les nombres 4, 5, 6, etc. qu'enfin ayant transporté daus une même colonne, comme on le voit dans la Table ci-jointe, les nombres 1, 2, 3, 4, 5, etc. on a écrit dans une colonne à côté, les termes de la progression arithmétique qu'on a trouvés correspondans à ceux-là, ou du moins à ceux qui en approchoit le plus; alors on aura l'idée de la formation des logarithmes, et de leur disposition dans les Tables ordinaires.

TABLE

Des Logarithmes des Nombres naturels, depuis 1 jusqu'à 200.

Nombres.	Logarithmes.	Nombres.	Logarithmes.	Nombres.	Logarithmes.	Nombres.	Logarithmes.
0	infini nég.	30	1,477121	60	1,778151	90	1,954243
1	0,000000	31	1,491362	61	1,785330	91	1,959041
2	0,301030	32	1,505150	62	1.792392	92	1,963788
3	0,477121	33	1,518514	63	1,799341	93	1,968483
4	0,602060	34	1,531479	64	1,806180	94	1,973128
5	0,698970	35	1,544068	65	1,812913	95	1,977724
6	0,778151	36	1,556303	66	1,819544	96	1,982271
7	0,845098	37	1,568202	67	1,826075	97	1,986772
8	0,903090	38	1,579784	68	1,832509	98	1,991226
9	0,954243	39	1,591065	69	1,838849	99	1,995635
10	1,000000	40	1,602060	70	1,845098	100	2,000000
11	1,041393	41	1,612784	71	1,851258	101	2,004321
12	1,079181	42	1,623249	72	1,857332	102	2,008600
13	1,113943	43	1,633468	73	1,863323	103	2,012837
14	1,146128	44	1,643453	74	1,869232	104	2,017033
15	1,176091	45	1,653213	75	1,875061	105	2,021189
16	1,204120	46	1,662758	76	1,880814	106	2,025306
17	1,230449	47	1,672098	77	1,886491	107	2,029384
18	1,255273	48	1,681241	78	1,892095	108	2,033424
19	1,278754	49	1,690196	79	1,897627	109	2,037426
20	1,301030	50	1,698970	80	1,903090	110	2,041393
21	1,322219	51	1,707570	81	1,908485	111	2,045323
22	1,342423	52	1,716003	82	1,913814	112	2,049218
23	1,361728	53	1,724276	83	1,919078	113	2,053078
24	1,380211	54	1,732394	84	1,924279	114	2,056905
25	1,397940	55	1,740363	85	1,929419	115	2,060698
26	1,414973	56	1,748188	86	1,934498	116	2,064458
27	1.431364	57	1,755875	87	1,939519	117	2,068186
28	1,447158	58	1,763428	88	1,944483	118	2,071882
29	1,462398	59	1,770852	89	1,949390	119	2,075547
30	1,477121	60	1,778151	90	1,954243	120	2,079181

Digitized by Google

Nombres.	Logarithmes.	Nombres.	Logarithmes.	Nombres.	Logarithmes.	Nombres.	Logarithmes.
120	2,079181	140	2,146128	160	2,204120	180	2,255273
121	2,082785	141	2,149219	161	2,206826	181	2,257679
122	2,086360	142	2,152288	162	2,209515	182	2,260071
123	2,089905	143	2,155336	163	2,212188	183	2,262451
124	2,093422	144	2,158362	164	2,214844	184	2,264818
125	2,096910	145	2,161368	165	2,217484	185	2,267172
126	2,100371	146	2,164353	166	2,220108	186	2,269513
127	2,103804	147	2,167317	167	2,222716	187	2,271842
128	2,107210	148	2,170262	168	2,225309	188	2,274158
129	2,110590	149	2,173186	169	2,227887	189	2,276462
130	2,113943	150	2,176091	170	2,230449	190	2,278754
131	2,117271	151	2,178977	171	2,232996	191	2,281033
132	2,120574	152	2,181844	172	2,235528	192	2,283301
133	2,123852	153	2,184691	173	2,238046	193	2,285557
134	2,127105	154	2,187521	174	2,240549	194	2,287802
135	2,130334	155	2,190332	175	2,243038	195	2,290035
136	2,133539	156	2,193125	176	2,245513	196	2,292256
137	2,136721	157	2,195900	177	2,247973	197	2,294466
138	2,139879	158	2,198657	178	2,250420	198	2,296665
139	2,143015	159	2,201397	179	2,252853	199	2,298853
140	2,146128	160	2,204120	180	2,255273	200	2,301030

Les logarithmes renfermés dans cette Table, n'ont que six chiffres après la virgule ; ils en ont 7 dans les Tables ordinaires ; mais cette différence ne nuit en rien à l'usage que nous en ferons ci-apres.

207. Remarquons au sujet des Tables de logarithmes, que le premier chiffre de chaque logarithme s'appelle la *Caractéristique*, parce que c'est par ce chiffre qu'on peut juger dans quelle décade

est compris le nombre auquel appartient ce logarihtme. Par exemple, si un nombre a pour caractéristique 3, je sais qu'il appartient à des mille, parce que le logarithme de 1000 est 3, et que celui de 10000 étant 4, tout nombre depuis 1000 jusqu'à 10000 ne peut avoir pour logarithme que 3 et une fraction; il a donc 3 pour caractéristique, et les autres chiffres expriment cette fraction réduite en décimales.

Propriétés des Logarithmes.

Les propriétés des logarithmes, dont nous allons parler, sont, pour la plupart, particulières au système de logarithmes où la progression géométrique fondamentale commence par l'unité, et la progression arithmétique par zéro. Les usages que nous en conclurons ne seroient pas les mêmes, si les deux progressions, ou l'une des deux seulement, commençoient autrement : mais la considération de celle-ci est étrangère à notre objet.

208. Comparons donc, terme à terme, une progression géométrique quelconque, mais dont le premier terme soit l'unité, avec une progression arithmétique aussi quelconque, mais dont le premier terme soit zéro; par exemple, les deux progressions suivantes. . . . . . .

$\div\div$ 1 : 3 : 9 : 27 : 81 : 243 : 729 : 2187 : 6561, etc.
$\div$ 0 . 4 . 8 . 12 . 16 . 20 . 24 . 28 . 32, etc.

Digitized by Google

Il suit de la nature et de la correspondance parfaite de ces deux progressions, qu'autant de fois la raison de la première a dû être facteur pour former l'un quelconque des termes de cette progression, autant de fois la raison de la seconde a dû être ajoutée pour former le terme correspondant de cette seconde; par exemple, dans le terme 2187, la raison 3 est sept fois facteur, et dans le terme 28, la raison 4 est contenue sept fois.

En effet, selon ce qui a été dit (190 et 196), la raison est facteur dans un terme quelconque de la première, autant de fois qu'il y a de termes avant celui-là; et dans la seconde, un terme quelconque est composé d'autant de fois la raison qu'il y a de termes avant lui. Or il y a le même nombre de termes de part et d'autre; donc, etc.

Concluons de-là qu'un terme quelconque de la progression géométrique, aura toujours pour correspondant dans la progression arithmétique, un terme qui contiendra la raison de celle-ci, autant de fois que la raison de l'autre est facteur dans ce terme de la progression géométrique.

209. Donc, *si on multiplie, l'un par l'autre, deux termes de la progression géométrique, et si on ajoute en même temps les deux termes correspondans de la progression arithmétique, le produit et la somme*

seront deux termes qui se correspondront dans ces progressions.

Car le produit sera formé de la raison autant de fois facteur qu'elle l'est, tant dans l'un des termes multipliés, que dans l'autre; et la somme des deux termes ajoutés, sera formée de la raison de la progression arithmétique ajoutée autant de fois qu'elle l'est, tant dans l'un des termes ajoutés, que dans l'autre; donc puisqu'on a pris des termes correspondans dans les deux progressions, le produit et la somme se correspondront aussi.

210. Donc on peut, par l'addition seule de deux termes de la progression arithmétique, connoître le produit des deux termes correspondans de la progression géométrique, en supposant ces deux progressions prolongées suffisamment.

Par exemple, en ajoutant les deux termes 8 et 24, qui correspondent à 9 et 729, j'ai 32 qui répond à 6561; d'où je conclus que le produit de 729 par 9, est 6561, ce qui est en effet.

211. Donc, puisque les nombres naturels qui composent la première colonne de la Table cidessus, ont été tirés d'une progression géométrique qui commence par l'unité, et puisque leurs logarithmes sont les termes correspondans d'une progression arithmétique, qui commence par zéro;

Digitized by Google

il faut en conclure, qu'en *ajoutant les logarithmes de deux nombres, on a le logarithme de leur produit.*

De-là il est aisé de conclure les usages suivans.

Usage des Logarithmes.

212. Pour faire une multiplication par logarithmes, il faut ajouter le logarithme du multiplicande, au logarithme du multiplicateur, la somme sera le logarithme du produit ; c'est pourquoi, cherchant cette somme parmi les logarithmes des Tables, on trouvera le produit à côté.

Par exemple, si on propose de multiplier 14 par 13.

Je trouve dans la petite Table ci-dessus, que le logarithme de 14 est.	1,146128
et que celui de 13 est.	1,113943
La somme.	2,260071

répond dans la même Table au nombre 182, qui est en effet le produit.

213. Pour quarrer un nombre, il suffit donc de doubler son logarithme, puisqu'il faudroit ajouter ce logarithme à lui-même, pour multiplier le nombre par lui-même.

214. Par une raison semblable, pour cuber un nombre, il faudra tripler son logarithme ; et en général, pour élever un nombre à une

puissance quelconque, il faudra prendre son logarithme autant de fois qu'il y a d'unités dans le nombre qui marque cette puissance; c'est-à-dire, multiplier son logarithme par le nombre qui marque cette puissance ; par exemple, pour élever un nombre à la septième puissance, il faudra multiplier par 7, le logarithme de ce nombre.

215. Donc, pour extraire la racine quarrée, cubique, quatrième, etc. d'un nombre proposé, il faudra diviser le logarithme de ce nombre par 2, 3, 4, etc. c'est-à-dire, en général par le nombre qui marque le degré de la racine qu'on veut extraire.

Par exemple, si on demande la racine quarrée de 144, ayant trouvé dans la table que le logarithme de ce nombre est 2,158362, j'en prends la moitié 1,079181; je cherche parmi les logarithmes, à quel endroit se trouve 1,079181; il répond à 12, qui est par conséquent la racine quarrée de 144.

Si on demande la racine septième de 128, je cherche dans la table son logarithme, que je trouve être 2,107210; j'en prends le septième, ou je le divise par 7, et je cherche à quoi répond dans la table le quotient 0,301030, il répond à 2, qui est en effet la racine septième de 128.

216. Pour trouver le quotient de la division d'un nombre par un autre, il faut retrancher le logarithme du diviseur, du logarithme du dividende, chercher dans la table à quel nombre répond

Digitized by Google

répond le logarithme restant; ce nombre sera le quotient.

Par exemple, si on veut diviser 187 par 17, je cherche, dans la Table, les logarithmes de ces deux nombres, et je trouve. . . . .

Le logarithme de 187.	2,271842
Celui de 17.	1,230449
La différence.	1,041393

répond, dans la Table, à 11 qui est en effet le quotient.

Si la division ne pouvoit pas être faite exactement, le logarithme restant ne se trouveroit qu'en partie dans la Table, mais nous allons enseigner ci-après ce qu'il faut faire dans ce cas.

La raison de cette règle est fondée, sur ce que le quotient multiplié par le diviseur, devant reproduire le dividende (68), le logarithme du quotient ajouté (210) au logarithme du diviseur, doit donc composer le logarithme du dividende, et par conséquent le logarithme du quotient vaut le logarithme du dividende, moins celui du diviseur.

217. D'après ce que nous venons de dire, il est très-facile de voir, que pour faire une règle de Trois par logarithmes, il faut ajouter le logarithme du second terme, au logarithme du troisième, et de la somme retrancher le logarithme du premier.

218. Remarquons que quand on cherche dans les Tables ordinaires un logarithme résultant de

quelques opérations sur d'autres logarithmes ; si l'on ne trouve qu'une unité de différence entre le dernier chiffre de ce logarithme, et celui de la Table, on doit regarder cette différence comme nulle, parce que les logarithmes de tous les nombres intermédiaires à la progression décuple, ne sont qu'approchés à environ une demi-unité décimale du septième ordre près.

Des Nombres dont les Logarithmes ne se trouvent point dans les Tables.

219. Les fractions et les nombres entiers joints à des fractions, n'ont pas leurs logarithmes dans les tables; il en est de même des racines quarrées, cubiques, etc. des nombres qui ne sont pas des puissances parfaites du degré de ces racines.

Si on demande le logarithme d'un nombre entier joint à une fraction, il faut d'abord réduire le tout en fraction, et ensuite retrancher le logarithme du dénominateur, du logarithme du nouveau numérateur.

Par exemple, pour avoir le logarithme de $8\frac{3}{11}$, je cherche celui de $\frac{91}{11}$, que je trouve en retranchant 1,041393 logarithme de 11, de 1,959041 logarithme de 91; le reste 0,917648 est le logarithme de $8\frac{3}{11}$, puisque $8\frac{3}{11}$ ou $\frac{91}{11}$, n'est autre chose que 91 divisé par 11 (90).

220. Si la fraction qui accompagne l'entier étoit une fraction décimale, l'opération se réduiroit à

Digitized by Google

chercher le logarithme, sans aucune attention à la virgule qui sépare les décimales dans le nombre proposé, et on retrancheroit de la caractéristique de ce logarithme, autant d'unités qu'il y avoit de chiffres décimaux dans ce même nombre proposé.

Par exemple, si on demande le logarithme de 1,53, je prends le logarithme de 153, qui est 2,184691; mais comme ce logarithme appartient à un nombre 100 fois plus grand que 1,53, je retranche de sa caractéristique 2 unités, qui sont le logarithme de 100, ce qui (216) correspond à la division par 100, et j'ai 0,184691 pour le logarithme de 1,53.

221. La même raison prouve que, pour avoir le logarithme d'une fraction, il faut retrancher pareillement le logarithme du dénominateur, du logarithme du numérateur; mais comme cette soustraction ne peut se faire, puisque le logarithme du dénominateur sera plus grand que celui du numérateur, on retranchera au contraire le logarithme du numérateur, de celui du dénominateur; le reste, qui marquera ce dont il s'en faut que la soustraction n'ait pu se faire, sera le logarithme de la fraction, en appliquant à ce reste un signe qui marque que la soustraction n'a pas été entièrement faite. Ce signe est celui-ci —, qu'on énonce *moins*. Ainsi le logarithme de la fraction $\frac{11}{91}$ seroit

— 0,917648 (*).

(*) Les nombres précédés du signe — se nomment nombres *négatifs*. Nous les ferons connoître dans l'Algèbre : en

222. Ce signe est destiné à rappeler dans le calcul, que les logarithmes des fractions doivent être employés selon une règle tout opposée à celle que nous avons prescrite pour les logarithmes des nombres entiers, ou des nombres entiers joints à des fractions; c'est-à-dire, que si on a à multiplier par une fraction, il faut retrancher le logarithme de cette fraction; si au contraire on a à diviser par une fraction, il faut ajouter son logarithme.

La raison en est, pour la multiplication, que multiplier par une fraction, revient à multiplier par le numérateur, et à diviser ensuite par le dénominateur; donc, lorsqu'on opère par logarithmes, on doit ajouter le logarithme du numérateur, et retrancher ensuite celui du dénominateur, ou, ce qui revient au même, on doit seulement retrancher l'excès du logarithme du dénominateur sur le logarithme du numérateur : or cet excès est précisément le logarithme de la fraction.

A l'égard de la division, la raison en est aussi facile à saisir; en effet, diviser par $\frac{3}{4}$, par exemple, revient (101) à multiplier par $\frac{4}{3}$; donc, en opérant par logarithme, il faut ajouter le logarithme de $\frac{4}{3}$; c'est-à-dire, la difference du logarithme

attendant nous prévenons que c'est en prendre une idée fausse, que de les regarder comme des nombres au-dessous de zéro. Il n'y a rien au-dessous de zéro.

Digitized by Google

de 4, au logarithme de 3, ou du logarithme du dénominateur de la fraction proposée au logarithme de son numérateur.

223. Si la fraction dont on veut avoir le logarithme, étoit en décimales, la question se réduiroit à chercher le logarithme, comme si la fraction décimale proposée n'avoit pas de virgule, et ayant retranché ce logarithme, d'autant d'unités qu'il a de chiffres décimaux, on feroit précéder le reste, du signe —.

Par exemple, pour avoir le logarithme de 0,03, je cherche celui de 3, qui est 0,477121; je le retranche de 2, et appliquant au reste le signe —, j'ai — 1,522879 pour le logarithme de 0,03.

224. Il peut arriver, et il arrive assez souvent, qu'en convertissant en une seule fraction, l'entier et la fraction dont on cherche le logarithme, il peut arriver, dis-je, que le numérateur soit un nombre qui passe les limites des Tables.

Par exemple, si on demande le logarithme de 53 $\frac{821}{5704}$, ce nombre réduit en fraction revient à $\frac{303133}{5704}$, dont le numérateur passe les limites des Tables les plus étendues.

Il est donc à propos de savoir comment on peut trouver en général le logarithme d'un nombre qui passe ces limites.

La méthode que nous allons donner, n'est pas

Digitized by Google

rigoureuse, mais elle est plus que suffisante pour les usages ordinaires. Avant que de l'exposer ; observons :

225. 1°. Qu'en ajoutant, 1, 2, 3, etc. unités à la caractéristique du logarithme d'un nombre, on multiplie ce nombre par 10, 100, 1000, etc. puisque c'est ajouter le logarithme de 10 ou de 100, ou de 1000, etc. (202 et 211).

2°. Au contraire, si on retranche 1, 2, 3, etc. unités de la caractéristique d'un logarithme, c'est diviser le nombre correspondant par 10, 100, 1000, etc.

226. Cela posé, qu'il soit question de trouver le logarithme de 357859, par exemple.

Je séparerai, par une virgule, sur la droite de ce nombre, autant de chiffres qu'il est nécessaire, pour que le reste puisse se trouver dans les Tables (a). Ici, par exemple, j'en séparerai deux, ce qui me donnera 3578,59, qui est 100 fois plus petit que le nombre proposé 357859.

Je cherche dans les Tables le logarithme de 3578, que je trouve être 3,5536403, je prends en même-temps à côté de ce logarithme (b) la différence 1214, entre ce même

(a) Nous supposons ici que l'on ait entre les mains des Tables ordinaires de logarithmes, qui aillent jusqu'à 20000, ou au moins jusqu'à 10000. Celles de M. de Rivard et celles de feu M. l'Abbé de la Caille, sont exactes et commodes.

(b) Ces différences se trouvent communément dans les Tables à côté des logarithmes mêmes.

Digitized by Google

logarithme et celui de 3579, après quoi je fais cette règle de Trois. Si pour une unité de différence entre les deux nombres 3579 et 3578,

On a 1214 de différence entre leurs logarithmes,

Combien pour 0,59 différence entre les deux nombres 3578,59 et 3578,

Aura-t-on de différence entre leurs logarithmes? c'est-à-dire, que je cherche le quatrième terme d'une proportion, dont les trois premiers sont. . . . .
1 : 1214 :: 0,59 :

Ce quatrième terme est 716,26, ou simplement 716, en négligeant les décimales; j'ajoute donc 716 au logarithme 3,5536403 de 3578, et j'ai 3,5537119 pour logarithme de 3578,59; il ne s'agit plus, pour avoir celui de 357859, que d'ajouter deux unités à la caractéristique du logarithme qu'on vient de trouver, et on aura 5,5537119 pour le logarithme cherché, puisque 357859 est 100 fois plus grand que 3578,59.

Si les chiffres qu'on doit séparer sur la droite étoient tous des zéros, après avoir trouvé dans les Tables le logarithme de la partie qui reste à gauche, il n'y auroit autre chose à faire, qu'à ajouter autant d'unités à la caractéristique qu'on auroit séparé de zéros.

Des Logarithmes dont les Nombres ne se trouvent point dans les Tables.

227. Cette recherche n'est pas moins nécessaire que la précédente. Par exemple, pour la division, il arrive rarement que le quotient soit un nombre entier; or, si l'on fait l'opération par logarithmes, on ne trouvera dans les Tables, le logarithme

Digitized by Google

restant, que quand le quotient sera un nombre entier : il y a une infinité d'autres cas de la même espèce.

228. Proposons-nous d'abord de trouver à quel nombre répond un logarithme proposé, soit qu'il excède les limites des Tables, soit qu'il tombe entre les logarithmes des Tables.

On retranchera de la caractéristique autant d'unités qu'il sera nécessaire, pour qu'on puisse trouver, dans les Tables, les premiers chiffres du logarithme proposé, ainsi préparé. Si tous les chiffres se trouvent alors dans les Tables, le nombre cherché sera le nombre même qu'on trouve à côté dans les Tables, mais en mettant à sa suite autant de zéros qu'on aura ôté d'unités à la caractéristique.

Par exemple, le logarithme 7,2273467 se trouve (après avoir ôté trois unités à la caractéristique) répondre exactement au nombre 16879; j'en concluds que le logarithme proposé 7,2273467, répond à 16879000.

Si on ne trouve, dans les Tables, que les premiers chiffres du logarithme, on se conduira comme dans l'exemple qui suit.

Pour trouver à quel nombre appartient le logarithme 5,2432768, j'ôte deux unités à sa caractéristique; le logarithme 3,2432768 que j'ai alors, tombe entre les logarithmes de 1750 et 1751; le nombre auquel il répond est donc 1750 et une fraction.

Afin d'avoir cette fraction, je retranche de mon logarithme 3,2432768, le logarithme de 1750, et j'ai pour différence 2388.

Je prends aussi dans les Tables, la différence 2481

Digitized by Google

entre les logarithmes de 1751 et 1750, après quoi je fais cette règle de Trois,

Si 2481 de différence entre les logarithmes de 1751 et 1750,

Répondent à 1 unité de différence entre ces nombres,

A quelle différence de nombres doit répondre la différence 2388 entre mon logarithme et celui de 1750?

Je trouve pour quatrième terme $\frac{2388}{2481}$; ainsi le logarithme 3,2432768 appartient au nombre 1750 $\frac{2388}{2481}$, à très-peu de chose près; par conséquent, le logarithme proposé qui appartient à un nombre 100 fois plus grand, a pour nombre correspondant 175000 $\frac{238800}{2481}$, c'est-à-dire, 175096 $\frac{624}{2481}$, ou en réduisant en décimales, il a pour nombre correspondant 175096,25.

229. Si le logarithme proposé tomboit entre ceux des Tables, il n'y auroit aucune unité à retrancher à la caractéristique, et par conséquent point de zéros à ajouter à la fin de l'opération, qu'on feroit d'ailleurs de la même manière.

230. Mais comme la proportion que nous employons dans cette méthode n'est pas rigoureusement exacte (*), et qu'elle n'approche de la vérité, qu'autant que les nombres cherchés sont grands; si le logarithme proposé tomboit au-dessous de celui de 1500, il faudroit, pour plus

(*) Cette proportion suppose que les différences des logarithmes sont proportionnelles aux différences des nombres, ce qui n'est jamais exactement vrai, mais approche assez, quand les nombres sont un peu grands, et cela suffit pour les usages ordinaires.

Digitized by Google

d'exactitude, ajouter à sa caractéristique autant d'unités qu'on pourroit le faire sans passer les bornes des Tables ; et ayant trouvé le nombre qui approche le plus d'y répondre dans ces Tables, on en sépareroit sur la droite autant de chiffres par une virgule, qu'on auroit ajouté d'unités à la caractéristique, ce qui suffira le plus souvent ; mais si l'on veut avoir plus de décimales, on fera la proportion comme ci-dessus (227), et réduisant le quatrième terme en décimales, on mettra celles-ci à la suite de celles qu'on a déjà trouvées.

Par exemple, si l'on demande à quel nombre appartient le logarithme 0,5432725 ; comme ce logarithme tombe entre ceux de 3 et de 4, et que le nombre auquel il appartient, est par conséquent beaucoup au-dessous de 1500, je cherche ce logarithme avec trois unités de plus à sa caractéristique ; c'est-à-dire, que je cherche 3,5432725 ; je trouve qu'il tombe entre les logarithmes de 3493 et 3494, d'où je conclus que le nombre cherché est 3,493, à moins d'un millième près. Mais si cette approximation ne suffit pas, je prendrai la différence entre mon logarithme et celui de 3493, c'est-à-dire, 739 ; je prendrai pareillement la différence 1243 entre les logarithmes de 3494 et 3493, et je chercherai en raisonnant comme ci-dessus (227) le quatrième terme d'une proportion qui commenceroit par ces trois-ci.

$$1243 : 1 :: 739 :$$

Ce quatrième terme évalué en décimales, est 0,594 ; donc le nombre cherché est 3,493594.

Au reste, cette seconde approximation est bornée, parce

que les logarithmes des Tables n'étant exacts qu'à environ une demi-unité décimale du septième ordre près, les différences sont affectées de ce léger défaut; mais on peut toujours pousser l'approximation avec confiance, jusqu'à trois décimales : au surplus, il est rare qu'on ait besoin d'aller jusque-là; mais la remarque que nous faisons, doit diriger aussi dans l'usage que nous avons fait ci-dessus (225 et 227) de la même proportion.

231. Si on veut avoir la fraction à laquelle répond un logarithme négatif proposé, on retranchera ce logarithme de 1, ou 2, ou 3, ou 4, etc. unités, selon l'étendue des Tables; et après avoir trouvé le nombre qui répond au logarithme restant, on séparera sur la droite, par une virgule, autant de chiffres qu'on aura employé d'unités pour retrancher le logarithme.

Par exemple, si on demande à quelle fraction appartient — 1,5327325, je retranche 1,5327325 de 4, et il me reste 2,4672675, qui dans les Tables se trouve entre les logarithmes de 293 et de 294; j'en conclus que la fraction cherchée est entre 0,0293, et 0,0294; c'est-à-dire, qu'elle est 0,0293, à moins d'un dix-millième près. En effet, retrancher de 4 le logarithme proposé 1,5327325, c'est (221) multiplier 10000 par la fraction à laquelle appartient ce même logarithme proposé, ou (ce qui est la même chose), c'est multiplier cette fraction par 10000; donc le nombre qu'on trouve est 10000 fois trop grand; il faut donc le compter pour des dix-millièmes.

Tout ce que nous venons de dire trouvera abondamment des applications par la suite. Bor-

Digitized by Google

nons-nous quant à présent à donner une idée, par quelques exemples, de l'avantage que les logarithmes procurent pour la facilité et la promptitude des calculs.

EXEMPLE I.

On demande le quotient de 17954 divisé par 12836, approché jusqu'à moins d'un millième près.

Logarithme de 17954..................	4,2541612
Logarithme de 12836..................	4,1084297
Reste........................	0,1457315

Ce reste, cherché dans les Tables avec une caractéristique plus forte de quatre unités, répond à 13987 ; donc le quotient cherché est 1,3987.

EXEMPLE II.

On demande la racine cubique de 53, à moins d'un millième près.

Le logarithme de 53 est................	1,7242759
Son tiers (215) est....................	0,5747586

Ce dernier, cherché dans les Tables avec une caractéristique plus forte de trois unités, répond à 3756; donc la racine cherchée est 3,756.

Pour juger de l'avantage des logarithmes, on n'a qu'à chercher cette racine par la méthode donnée (146).

EXEMPLE III.

On propose de multiplier 4,53 par 0,527.

(219) Log. 4,53. . . 0,6560982
(222) Log. 0,527. . — 0,2781894

donc (221)............ 0,3779088........... qui (227) est le log. de 2,38731.

Au reste, dans cet exemple et ses semblables, il est inutile d'avoir recours aux regles données (219 et 222). Il suffit d'ajouter ensemble les logarithmes des deux nombres proposés, comme s'il n'y avoit pas de décimales, et ayant trouvé le nombre correspondant, on en sépare (54) autant de décimales qu'il y en avoit dans les deux facteurs.

EXEMPLE IV.

On demande quatre moyens proportionnels géométriques entre $2\frac{2}{3}$ et $5\frac{3}{4}$.

Il faudroit (199) pour avoir la raison qui doit régner dans la progression, diviser $5\frac{3}{4}$ par $2\frac{2}{3}$, et extraire la racine cinquième du quotient.

Par logarithmes, l'opération est beaucoup plus simple. Je détermine les logarithmes de $5\frac{3}{4}$ ou $\frac{23}{4}$, et de $2\frac{2}{3}$ ou $\frac{8}{3}$; je trouve 0,7596678 et 0,4259687. Je retranche ce dernier du premier (216), et je prends (215) le cinquiéme du reste; j'ai 0,0667398 pour logarithme de la raison cherchée. Le nombre qui répond à ce logarithme, est 1,1661 à moins d'un dix-millième près. Ainsi pour avoir les moyens proportionnels demandés, il ne s'agit plus que de multiplier le premier terme $2\frac{2}{3}$, par 1,1661; puis le produit, par 1,1661; et ainsi de suite.

Mais on peut encore faire usage des logarithmes pour exécuter promptement ces multiplications; il suffit pour cela d'ajouter consécutivement le logarithme trouvé de la raison, au logarithme aussi trouvé du premier terme 2 et $\frac{2}{3}$; et l'on aura les résultats suivans,

Digitized by Google

		Moyens proport. correspondans.
Log. $2\frac{2}{3}$	0,4259687	
Plus log. de la raison.	0,4927085	3,109
Plus 2 fois log. de la raison.	0,5594483	3,626
Plus 3 fois log. de la raison.	0,6261881	4,228
Plus 4 fois log. de la raison.	0,6929279	4,931

Du Complément arithmétique, et de son usage.

232. Lorsque dans une opération où l'on fait usage des logarithmes, il s'en trouve quelques-uns qui doivent être retranchés, on peut simplifier l'opération par l'observation suivante.

Lorsqu'on a à retrancher un nombre quelconque, d'un autre qui est l'unité suivie d'autant de zéros qu'il y a de chiffres dans le premier; l'opération se réduit à écrire la différence entre 9 et chacun des chiffres du nombre proposé, à l'exception du dernier pour lequel on écrit la différence entre 10 et ce chiffre.

Par exemple, si j'ai 526927 à retrancher de 1000000; je retranche successivement les chiffres 5, 2, 6, 9, 2, de 9; et le dernier chiffre 7, je le retranche de 10, et j'ai 473073 pour reste.

Ce reste est ce qu'on appelle le *Complément arithmétique* du nombre proposé.

La soustraction faite de cette manière, étant

Digitized by Google

trop simple pour pouvoir être comptée pour une opération, il s'ensuit que lorsqu'on aura à former un résultat, de l'addition et de la soustraction de plusieurs nombres, on pourra toujours réduire l'opération à l'addition.

Par exemple, s'il s'agit d'ajouter les deux nombres 672736, 426452, et de retrancher de leur somme les deux nombres 432752, 18675; ce qui exige deux additions et une soustraction, je substitue à cette opération la suivante,

	672736
	426452
Complément arith. de 432752.	567248
Complément arith. de 18675.	981325
Somme.	2647761

c'est-à-dire, que j'ajoute ensemble les deux premiers nombres proposés, et les complémens arithmétiques des deux derniers; la somme est 2647761. Il faut en supprimer le premier chiffre 2 sur la gauche; et les chiffres restans 647761 sont le résultat cherché.

La raison de cette opération est facile à apercevoir, en remarquant que si au lieu de retrancher 432752, comme on le proposoit, j'ajoute son complément arithmétique, c'est-à-dire, 1000000 moins 432752, je fais en même temps la soustraction proposée, et une augmentation de 1000000; c'est-à-dire, d'une dixaine au premier chiffre du résultat; donc pour chaque complément arithmétique que j'aurai introduit, j'aurai une dixaine de trop à l'égard du premier chiffre du résultat.

L'application de cela aux logarithmes est évidente.

Digitized by Google

EXEMPLE I.

Qu'il soit question de diviser 3760, par 79; il faudroit retrancher le logarithme de 79, de celui de 3760. Au lieu de cette opération j'écris

Log. 3760.	3,5751878
Complément arith. du log. de 79. . . .	8,1023729
Somme.	11,6775607

Ainsi 1,6775607 est le logarithme du quotient, et répond à 47,59 à moins d'un centième près.

EXEMPLE II.

S'agit-il de multiplier $\frac{675}{527}$ par $\frac{952}{377}$ il faudroit (97) multiplier 675 par 952, et 527 par 377, puis diviser le premier produit par le second. Par logarithmes, on opérera ainsi,

Log. 675.	2,8293038
Log. 952	2,9786369
Complément arith. du log. de 527. .	7,2781894
Complément arith. du log. de 377. .	7,4236596
Somme.	20,5097897

Le logarithme du produit est donc 0,5097897 qui, cherché avec trois unites de plus à la caractéristique, répond à 3,234.

On peut faire usage du complément arithmétique, pour mettre les logarithmes des fractions, sous la même forme que ceux des nombres entiers, et les employer de même dans le calcul. Par-là on évitera la distinction des logarithmes négatifs et des logarithmes positifs. Il suffira de se souvenir, que

Digitized by Google

que la caractéristique du logarithme des fractions proprement dites, est trop forte de 10 unités.

Par exemple, pour avoir le logarithme de $\frac{3}{4}$, qui (89) n'est autre chose que 3 divisé par 4 ; au lieu de retrancher le logarithme de 4, de celui de 3 ; c'est-à-dire, de retrancher le logarithme de 3 de celui de 4, et donner (220) au reste le signe — ; au logarithme de 3, j'ajoute le complément arithmétique du logarithme de 4 ;

Log. 3	0,4771213
Complément arith. du log. de 4.	9,3979400
Somme.	9,8750613

Cette somme est le logarithme de $\frac{3}{4}$, dont la caractéristique est trop forte de 10 unités. Or il n'est pas nécessaire de faire actuellement la diminution ; on peut la rejeter à la fin des opérations dans lesquelles on emploiera ce logarithme.

La même règle s'applique aux fractions décimales.

Ainsi pour avoir le logarithme de 0,575, qui n'est autre chose que $\frac{575}{1000}$; au logarithme de 575, j'ajouterois le complément arithmétique du logarithme de 1000 ; ce qui, en général, se réduit à prendre le logarithme de la quantité décimale proposée, comme s'il n'y avoit pas de virgule dans cette quantité, et ajouter à la caractéristique de ce logarithme autant d'unités qu'il y a de différence entre 10, et le nombre des chiffres décimaux. Dans le cas présent, par exemple ; à la caractéristique du logarithme 2,7596678 du nombre 575, j'ajouterois 7, différence entre 10 et le nombre 3 des décimales de 0,575, et j'aurois 9,7596678 pour le logarithme de 0,575, la caractéristique étant sous-entendue trop forte de 10 unités.

Digitized by Google

En employant ainsi les complémens arithmétiques, au lieu des logarithmes négatifs des fractions, il n'en est pas plus difficile de trouver dans les Tables les valeurs en décimales de ces mêmes fractions. Dès que je saurai qu'un logarithme proposé, est, ou renferme un ou plusieurs complémens arithmétiques; je sais que sa caractéristique est trop forte d'autant de dixaines qu'il y entre de complémens arithmétiques; ainsi si elle passe ce nombre de dixaines, il sera facile de la diminuer, et de trouver le nombre auquel appartient ce logarithme, et qui sera un nombre entier, ou un nombre entier joint à une fraction.

Mais si la caractéristique est au-dessous du nombre de dixaines qu'elle est censée renfermer de trop; elle appartient certainement à une fraction que je trouverai en cette manière. Je chercherai, par ce qui a été dit (226 et suiv.), à quel nombre répond le logarithme proposé, et lorsque je l'aurai trouvé, j'en séparerai, par une virgule, autant de dixaines de chiffres, sur la droite, qu'il y aura de dixaines de trop dans la caractéristique.

Par exemple, si l'on me donnoit 8,7322350 pour logarithme, résultant d'une opération, dans laquelle il est entré un complément arithmétique : je vois, puisque sa caractéristique est au-dessous d'une dixaine, qu'il appar-

Digitized by Google

tient à une fraction. Je cherche d'abord (227) à quel nombre répond 8,7322350, considéré comme logarithme de nombre entier ; je trouve qu'il répond à 539802600 ; séparant 10 chiffres, j'ai 0,0539802600 pour valeur très-approchée de la fraction qui répond au logarithme proposé.

Mais comme il est très-rarement nécessaire d'avoir ces fractions à un pareil degré de précision ; on abrégera en diminuant tout de suite la caractéristique du logarithme proposé, autant qu'il est nécessaire pour la faire tomber parmi celles des Tables, et prenant seulement le nombre correspondant, on en séparera autant de chiffres de moins que ne prescrit la régle précedente, autant de moins, dis-je, qu'on aura ôté d'unités à la caractéristique.

Ainsi, dans l'exemple que nous venons de donner, je diminuerois la caractéristique de 5 unités, et ayant trouvé que le nombre correspondant est 5398, j'en séparerois seulement 5 chiffres, et j'aurois 0,05398.

Dans les élévations aux puissances, il faudra observer qu'en multipliant (213) le logarithme par le nombre qui marque le degré de la puissance, il se trouvera qu'on multipliera aussi ce dont la caractéristique se trouvera être trop forte ; ainsi en élevant au cube, par exemple ; s'il entre un complément arithmétique dans le logarithme proposé, c'est-à-dire, si la caractéristique est

Digitized by Google

trop forte de 10 unités, celle du logarithme du cube, sera trop forte de 30 unités, et ainsi des autres; il sera donc facile de la ramener à sa juste valeur, ou d'en tenir compte.

Dans les extractions des racines, pour éviter toute méprise, lorsqu'il entrera des complémens arithmétiques dans les logarithmes dont on fera usage, on aura soin d'ajouter ou d'ôter à la caractéristique, autant de dixaines qu'il est nécessaire, pour que ce dont elle sera trop forte, soit d'autant de dixaines qu'il y a d'unités dans le nombre qui marque le degré de la racine, et ayant, conformément à la règle ordinaire, divisé par le nombre qui marque le degré de la racine, la caractéristique sera trop forte précisément de 10 unités.

Par exemple, si l'on demande la racine cubique de $\frac{276}{547}$; au logarithme de 276, j'ajoute le complément arithmétique de celui de 547. . . . .

Logarithme 276	2,4409091
complément arith. du log. de 547.	7,2620127
Somme	9,7029218
à la caractéristique de laquelle j'ajoute. . .	20, ...
	29,7029218

Afin qu'elle devienne trop forte de 3 dixaines, et j'ai 29,7029218, dont le tiers 9,9009739 est le logarithme de la racine cubique demandée, mais avec 10 unités de trop à la caractéristique; ainsi, conformément à ce qui a été observé ci-dessus, je trouve que cette racine cubique est 0,7961, à moins d'un dix-millième près.

Digitized by Google

TABLE DES POIDS ET MESURES
employés dans l'Arithmétique, et des Caractères qui servent à les désigner.

Pour les Monnoies.

Caractères. — *Subdivisions.*

₶ signifie . . . livre.
ſ . . . . sou.
d . . . . denier.

		deniers.
	1 sou.	12
1 livre.	20	240

Pour le Temps.

j signifie . . . . jour.
h . . . . heure.
' . . . . minute.
'' . . . . seconde.

			secondes.
		1 minute.	60
	1 heure.	60	3600
1 jour.	24	1440	86400

Pour les Poids.

Poids de marc ou de Paris.

℔ signifie . . . . livre.
M . . . . marc.
O ou ℥ . . . . once.
G ou ʒ . . . . gros ou dragme.
D ou ℈ . . . . denier ou scrupule.
G ou g̅ . . . . grain.

					grains.
1 denier.					24
1 gros.				3	72
1 once.			8	24	576
1 marc.		8	64	192	4608
1 livre.	2	16	128	384	9216

Poids Anglois de Troy.

On emploie ce poids en Angleterre pour les matières de petit volume et précieuses ; l'once vaut 585 $\frac{1}{12}$ grains, poids de Paris.

				grains.
1 scrupule.				20
1 dragme.			3	60
1 once.		8	24	480
1 livre.	12	96	288	5760

Digitized by Google

Poids Anglois, Avoir du poids.

On se sert de ce poids en Angleterre pour les matières pesantes et de gros volume ; on l'emploie dans l'artillerie ; l'once vaut 533 $\frac{5}{8}$ grains, poids de Paris.

			dragmes.
		1 once.	16
	1 livre.	16	256
1 quintal.	112	1792	28672

Pour les mesures des Longueurs.

t signifie . . . . toise.
pi. . . . . pied.
po. . . . . pouce.
l . . . . ligne.
pt. . . . . point.

				points.
			1 ligne.	12
		1 pouce.	12	144
	1 pied.	12	144	1728
1 toise.	6	72	864	10368

Chaque case de ces Tables, marque combien l'unité qui commence la même ligne horizontale, contient d'unités

de l'espèce de celle qui répond verticalement au-dessus de cette même case.

Le pas ordinaire vaut . . . . 2 pieds $\frac{1}{2}$.
Le pas géométrique . . . . 5 pieds.
La brasse. . . . . 5 pieds.
L'aune de Paris. . . . . $3^{\text{pi.}}\ 7^{\text{po.}}\ 10^{\text{l}}\ \frac{4}{5}$.
Le pied de Roi étant divisé en . . . . 1440 parties.
Le pied de Londres en contient. . . . 1351,7
Le pied du Rhin. 1392

TABLE
DES PRINCIPES.

La quantité est tout ce qui est susceptible d'augmentation ou de diminution, numéro 1.

L'arithmétique est la science des nombres, n. 2.

L'unité est le terme de comparaison de toutes les quantités de même espèce, n. 4.

Le nombre exprime combien il y a d'unités ou de parties d'unité dans une quantité, n. 5.

Le nombre abstrait est celui qui n'est appliqué à aucune espèce déterminée, n. 6.

Le nombre concret est toujours appliqué à quelqu'espèce de chose, n. 6.

La numération est l'art d'énoncer et de représenter les nombres, n. 7.

La numération actuelle est fondée sur ce principe de convention, que si plusieurs chiffres sont rangés sur une même ligne, les unités représentées par chacun de ces chiffres, valent dix fois plus que celles du chiffre à la droite, et dix fois moins que celles du chiffre à sa gauche, n. 15.

Les nombres incomplexes ne se rapportent qu'à une seule espèce d'unité, n. 18.

Les nombres complexes expriment des quantités dont les parties sont comparées à différentes unités, n. 18.

Les décimales sont des parties de dix en dix fois plus petites que l'unité; on les exprime par des chiffres placés à la droite des unités, et séparés d'elles par une virgule, n. 21.

Un nombre devient dix fois plus grand ou plus petit, à mesure que la virgule avance ou recule d'un rang vers la droite ou vers la gauche, n. 28.

L'addition est une opération par laquelle on exprime, par un seul nombre, la valeur totale de plusieurs nombres de même espèce, n. 32.

Digitized by Google

La soustraction est une opération par laquelle on trouve le reste, l'excès ou la différence de deux nombres de même espèce, n. 34.

La multiplication est une opération par laquelle on répète un nombre autant de fois qu'il y a d'unités dans une autre, n. 40.

Le nombre que l'on répète s'appelle *multiplicande;* celui qui indique combien de fois on le répète, se nomme *multiplicateur;* et l'on appelle *produit*, le résultat de la multiplication, n. 41.

On appelle *facteurs* les nombres que l'on multiplie l'un par l'autre, n. 42.

La multiplication est une addition réitérée du multiplicande, autant de fois qu'il y a d'unités dans le multiplicateur, n. 43.

Le produit est toujours de même nature que le multiplicande, n. 47.

Dans la multiplication des parties décimales, le produit doit avoir autant de chiffres décimaux qu'il y en a en tout dans les deux facteurs, n. 54.

La division est une opération par laquelle on cherche combien de fois un nombre est contenu dans un autre, n. 58.

Le nombre qu'on divise s'appelle *dividende;* celui par lequel on divise, *diviseur*, et celui qu'on trouve, *quotient*, n. 58.

Le dividende est toujours égal au produit d'une multiplication dont le diviseur et le quotient seraient facteurs, n. 58.

La nature des unités du quotient ne peut, en général, être déterminée que par l'état de la question qui donne lieu à la division, n. 59.

La division des parties décimales se réduit à celle des nombres entiers, en observant de rendre les mêmes, le nombre des décimales du dividende, et celui des décimales du diviseur, n. 65.

On appelle *fraction*, un ou plusieurs parties de l'unité partagée en un nombre quelconque de parties égales, n. 74.

Une fraction est exprimée par deux nombres, dont l'un marque en combien de parties égales l'unité est partagée; il s'appelle *dénominateur;* et l'autre marque combien il entre

Digitized by Google

de ces parties dans la valeur de la fraction; on le nomme *numérateur*, n. 76.

Le numérateur et le dénominateur s'appellent les *deux termes de la fraction*, n. 78.

Une expression fractionnaire, dont le numérateur est plus grand que le dénominateur, vaut plus que l'unité, n. 79.

Lorsqu'une expression fractionnaire vaut plus que l'unité, on trouve sa valeur en divisant le numérateur par le dénominateur, n. 80.

On réduit un nombre entier en fraction d'une espèce déterminée, en le multipliant par le dénominateur de cette fraction, n. 80.

On ne change point la valeur d'une fraction quand on en multiplie ou divise les deux termes par un même nombre, n. 81 et 82.

Par ce principe on rend raison de la réduction de plusieurs fractions au même dénominateur, et de la réduction des fractions à leur plus simple expression, n, 83, 84 et 86.

Un nombre premier est celui qui n'a d'autre diviseur que l'unité ou lui-même, n. 87.

Une fraction peut être considérée comme le quotient d'une division dont le numérateur seroit le dividende, et le dénominateur seroit le diviseur, n. 89.

Une fraction peut être réduite en décimales, en divisant le numérateur (suivi d'autant de zéros qu'on veut avoir de décimales) par le dénominateur, n. 92.

Pour additionner les fractions et les retrancher l'une de l'autre, il faut préalablement les réduire au même dénominateur, puis on ajoute ou l'on retranche les numérateurs, et l'on donne à la somme ou à la différence le dénominateur commun, n. 94 et 95.

Pour multiplier une fraction par une autre fraction, il faut multiplier numérateur par numérateur, et dénominateur par dénominateur, n. 97.

Pour diviser une fraction par une autre, il faut la multiplier par la fraction diviseur renversée, n. 101.

Évaluer une fraction, c'est en chercher la valeur en sous-espèces de l'unité principale dont elle fait partie, n. 104.

Une fraction de fraction est égale au produit de toutes les fractions qui entrent dans son expression, n. 108.

L'addition et la soustraction des nombres complexes ne diffèrent de celles des nombres incomplexes que par les différentes subdivisions de l'unité, n. 110 et 111.

Un nombre est partie aliquote d'un autre, ou bien est sous-multiple de cet autre, quand il y est exactement contenu, n. 113.

Dans la multiplication des nombres complexes, on considère les sous-espèces comme des fractions, l'une à l'égard de l'autre, et à l'égard de l'unité principale, n. 115.

Dans la division des nombres complexes, il faut toujours rendre le diviseur incomplexe, n. 112. et suiv.

Le quarré d'un nombre est le produit de ce nombre multiplié par lui-même, n. 123.

La racine d'un quarré est le nombre qui, multiplié par lui-même, a produit ce quarré, n. 124.

Lorsqu'un nombre n'est pas un quarré parfait, sa racine est appelée *sourde*, *irrationnelle ou incommensurable*, n. 126.

Le quarré d'un nombre, composé de dixaines et d'unités, contient *le quarré des dixaines*, *le double produit des dixaines par les unités*, *et le quarré des unités*, n. 127.

Sur ce principe est fondée l'extraction de la racine quarrée d'un nombre composé de plus de deux chiffres, n. 129 et suiv.

Pour approcher de la racine quarrée d'un nombre qui n'est pas un quarré parfait, on met à la suite de ce nombre, deux fois autant de zéros que l'on veut de décimales à la racine, n. 133.

Pour extraire la racine quarrée d'une fraction, on tire la racine du numérateur et celle du dénominateur, si les deux termes de la fraction sont des quarrés parfaits; sinon, on réduit la fraction en décimales d'un nombre pair de chiffres décimaux, et on extrait ensuite la racine, n. 135 et suiv.

Le cube d'un nombre est le produit de ce nombre, multiplié par son quarré, n. 140.

Digitized by Google

La racine cubique d'un cube est le nombre qui, multiplié par son quarré, produit ce cube, n. 142.

Le cube d'un nombre composé de dixaines et d'unités, contient le cube des dixaines, trois fois le quarré des dixaines multiplié par les unités, trois fois les dixaines multipliées par le quarré des unités et le cube des unités, n. 145.

Sur ce principe est fondée l'extraction de la racine cubique d'un nombre composé de plus de trois chiffres, n. 146.

On approche de la racine bique d'un nombre, qui n'est pas un cube parfait, en mettant à la suite de ce nombre trois fois autant de zéros qu'on veut de décimales à sa racine, n. 147.

Pour extraire la racine cubique d'une fraction, on tire la racine cubique du numérateur et celle du dénominateur, n. 148 et suiv.

La raison ou le rapport est le résultat de la comparaison de deux quantités, n. 152.

Le rapport arithmétique consiste dans la différence des deux quantités comparées, n. 153.

Le rapport géométrique consiste dans le nombre de fois qu'une quantité en contient une autre, n. 154.

Un rapport arithmétique ne change point quand on ajoute à ses deux termes, ou quand on en retranche une même quantité, n. 159.

Un rapport géométrique ne change point quand on multiplie ou quand on divise ses deux termes par un même nombre, n. 160.

Quatre quantités sont en proportion quand le rapport des deux premières est égal au rapport des deux dernières. La proportion est arithmétique ou géométrique selon la nature des rapports qui la composent, n. 162.

La proportion continue, est celle dont les termes moyens sont égaux entre eux, n. 164.

Dans toute proportion arithmétique, la somme des extrêmes est égale à la somme des moyens, n. 166.

Dans une proportion artithmétique continue, la somme des extrêmes est

double du terme moyen, n. 167.

Dans une proportion géométrique, le produit des extrêmes est égal au produit des moyens, n. 168.

Et si la proportion est continue, le produit des extrêmes est égal au quarré du terme moyen, n. 168.

Le quatrième terme d'une proportion géométrique est égal au produit du second par le troisième divisé par le premier, n. 169.

Si quatre quantités sont telles que le produit des extrêmes soit égal à celui des moyens, ces quatre quantités sont en proportion, n. 170.

Si quatre quantités sont en proportion, elles y seront encore si on met les extrêmes à la place des moyens, et les moyens à la place des extrêmes, ou si l'on échange les places des moyens, ou celles des extrêmes, n. 171 et 172.

On peut multiplier ou diviser par un même nombre les deux antécédens ou les deux conséquens, sans troubler la proportion, n. 173.

Tout changement fait dans une proportion, de manière que la somme de l'antécédent et du conséquent, ou leur différence, soit comparée à l'antécédent ou au conséquent, de la même manière dans chaque rapport, formera toujours une proportion, n. 174.

La somme ou la différence des antécédens d'une proportion, est à la somme ou la différence des conséquens, comme un antécédent est à son conséquent, n. 175.

Dans une suite de plusieurs rapports égaux, la somme des antécédens, est à celle des conséquens, comme un antécédent est à son conséquent, n. 176.

Le rapport composé résulte de deux ou plusieurs rapports, dont on multiplie les antécédens entr'eux et les conséquens entr'eux, n. 177.

Le rapport est doublé, triplé, quadruplé, ect. quand il est composé de deux, trois, quatre, ect. rapports égaux, n. 179.

Les produits de deux ou plusieurs proportions multipliées par ordre, ou terme

par terme, sont en proportion, n. 180.

Les quarrés, les cubes, et en général les puissances semblables de quatre quantités en proportion, sont aussi en proportion, n. 181,

Les racines quarrées, cubiques, etc. de quatre quantités en proportion, sont aussi en proportion, n. 182.

La règle de trois a pour objet de trouver un terme d'une proportion, les trois autres étant donnés, n. 184.

Une règle de trois est simple quand son énoncé ne renferme que quatre termes, dont l'un est à trouver, et les trois autres sont donnés, n. 184.

Une règle de trois est directe lorsque les quantités principales sont directement proportionnelles à leurs relatives, n. 184.

Une règle de trois est inverse quand les quantités principales sont réciproquement proportionnelles à leurs relatives, n. 185.

Une règle de trois est composée, lorsque son énonce renferme plus de trois termes connus; on la réduit à une proportion dont les rapports sont composés, n. 186.

La règle de société a pour objet, de partager un nombre en plusieurs parties qui aient des rapports donnés, n. 187,

La progression arithmétique est une suite de termes qui ont même différence, n. 188.

Un terme quelconque d'une progression arithmétique croissante, est composé du premier, plus autant de fois la raison ou la différence, qu'il y a de termes avant lui, n. 190.

Une progression géométrique est une suite de termes, dont chacun contient également le suivant, ou y est également contenu, n. 195.

Un terme quelconque d'une progression géométrique croissante, est composé du premier multiplié, autant de fois de suite, par la raison, qu'il y a de termes avant lui, n. 196.

Les logarithmes sont des nombres en progression arithmétique, qui répondent, terme pour terme, à une pareille suite de nombres en progression géométrique, n. 200.

Dans la construction des logarithmes dont on fait usage actuellement, on a fait

correspondre la progression arithmétique, 0, 1, 2, 3, etc. à la progression géométrique décuple, 1, 10, 100, 1000, etc. n. 202.

La caractéristique du logarithme d'un nombre, marque dans quelle décade est compris ce nombre, n. 206.

La somme des logarithmes de deux nombres est égale au logarithme de leur produit, n. 210.

Le logarithme d'une puissance quelconque d'un nombre est égal au logarithme de ce nombre, multiplié par le nombre qui marque cette puissance, n. 213.

Le logarithme de la racine d'un nombre, est égal au logarithme de ce nombre, divisé par le degré de la racine, n. 214.

Le logarithme du quotient d'une division est égal au logarithme du dividende, moins le logarithme du diviseur, n. 215.

Le logarithme d'un nombre entier joint à une fraction, se trouve, en réduisant cet entier en fraction, et retranchant le logarithme du dénominateur, de celui du nouveau numérateur, n. 218.

Le logarithme d'une fraction est la différence des logarithmes du numérateur et du dénominateur, précédée d'un signe, qui avertit que cette différence est un nombre qui reste encore à retrancher; en sorte que les logarithmes doivent être employés, suivant des règles contraires à celles que l'on suit pour ceux des nombres entiers, pour la multiplication et la division, n. 220 et 221.

Le complément arithmétique d'un nombre, est la différence entre ce nombre, et l'unité suivie d'autant de zéros qu'il y a de chiffres dans ce nombre, n. 231.

Par l'usage des complémens arithmétiques, on change les soustractions en additions, et on ramène les logarithmes des fractions aux mêmes règles que l'on suit pour ceux des nombres entiers, n. 231.

Fin de la Table des Principes.

ÉLÉMENS
DE
GÉOMÉTRIE.

1. L'ESPACE que les corps occupent, a toujours les trois dimensions, *Longueur*, *Largeur*, et *Profondeur* ou *Épaisseur*.

Quoique ces trois dimensions se trouvent toujours ensemble, dans tout ce qui est corps, néanmoins nous les séparons assez souvent par la pensée ; c'est ainsi, que lorsque nous pensons à la profondeur d'une rivière, d'un fossé, etc. nous ne sommes point occupés de sa longueur ni de sa largeur; pareillement, quand nous voulons juger de la quantité de saucissons qui entre dans la chemise d'une batterie, nous ne nous occupons que de sa longueur et de sa largeur, et point du tout de son épaisseur.

Nous distinguerons donc trois sortes d'étendue ; savoir :

Digitized by Google

L'étendue en longueur seulement, que nous appellerons *ligne*.

L'étendue en longueur et largeur seulement, que nous nommerons *surface* ou *superficie*.

Enfin l'étendue en longueur, largeur et profondeur, que nous nommerons indifféremment, *volume*, *solide*, *corps*.

Nous examinerons successivement les propriétés de ces trois sortes d'étendue ; c'est-là l'objet de la science qu'on appelle *Géométrie*.

PREMIÈRE SECTION.

Des Lignes.

2. LES extrémités d'une ligne, se nomment des *points*. On appelle aussi de ce nom, les endroits où une ligne est coupée; ou encore, ceux où des lignes se rencontrent.

On peut considérer le point comme une portion d'étendue qui auroit infiniment peu de longueur, de largeur et de profondeur.

La trace d'un point qui seroit mu de manière à tendre toujours vers un seul et même point, est ce qu'on appelle une *ligne droite*. C'est le plus

court chemin pour aller d'un point à un autre ; *AB* (*fig.* 1) est une ligne droite.

On appelle, au contraire, *ligne courbe*, la trace d'un point qui, dans son mouvement, se détourne infiniment peu, à chaque pas.

On voit donc qu'il n'y a qu'une seule espèce de ligne droite, mais qu'il y a une infinité d'espèces de courbes différentes.

Les lignes, droites ou courbes, que nous pouvons tracer sur le papier ou sur toute autre surface, ne peuvent être sans quelque largeur, parce que le crayon, la plume, ou en général l'instrument dont nous nous servons, n'est jamais terminé par une pointe que l'on puisse regarder comme n'ayant ni longueur ni largeur. Aussi ces lignes ne doivent-elles être regardées que comme la représentation des lignes proprement dites.

(3). Pour tracer une ligne droite d'une étendue médiocre, comme lorsqu'il s'agit de conduire par les deux points *A* et *B* (*fig.* 1) une ligne droite, sur le papier ; on sait qu'on emploie une règle qu'on applique sur les deux points *A* et *B*, ou très-près, et à distances égales de ces deux points, et avec un crayon ou une plume qu'on fait glisser le long de cette règle, on trace la ligne *AB*.

Mais lorsqu'il s'agit de tracer une ligne un peu grande, on fixe au point *A* l'extrémité d'une ficelle que l'on frotte avec un morceau de craie ; et appliquant un autre de ses points, sur le point *B*, on pince la ficelle pour l'élever au-dessus de *AB*, et la laissant aller, elle marque en s'appliquant sur la surface, une trace qui est la ligne droite dont il s'agit.

Digitized by Google

Quand il est question d'une ligne fort grande, mais dont les extrémités peuvent être vues l'une de l'autre; on se contente de marquer entre ses deux extrémités, un certain nombre de points de cette ligne. Par exemple, lorsqu'on veut prendre des alignemens sur le terrein, on place à l'une des extrémités *B* (*fig.* 2) un bâton où jallon *BD*, que par le moyen d'un fil à-plomb, on rend le plus vertical que faire se peut; on en fixe un autre de la même manière au point *A*; et se plaçant à ce même point *A*, on fait placer successivement plusieurs autres jallons, à différens points *C*, *C*, etc. entre *A* et *B*, de manière qu'appliquant l'œil le plus près qu'il est possible du jallon *AD*, et regardant le jallon *BD*, celui *CD* dont il s'agit, paroisse confondu avec *BD*; alors tous les points *C*, *C*, *C*, etc. déterminés de cette manière, sont dans l'alignement *AB*.

On s'y prendroit d'une manière semblable, s'il s'agissoit de prolonger la ligne droite *AB*.

Quand les deux extrémités *A* & *B* ne sont pas visibles l'une de l'autre, on a recours à des moyens que nous enseignerons par la suite.

4. Les lignes se mesurent par d'autres lignes; mais, en général, la mesure commune des lignes, c'est la ligne droite. Mesurer une ligne droite ou courbe, ou une distance quelconque, c'est chercher combien de fois cette ligne, ou cette distance, contient une ligne droite connue et déterminée, que l'on considère alors comme unité. Cette unité est absolument arbitraire. Aussi y a-t-il bien des espèces de mesures différentes en fait de lignes. On trouvera, à la fin de ce vo-

Digitized by Google

lume, une table de celles qu'il est le plus nécessaire de connoître.

5. Pour faciliter l'intelligence de ce que nous avons à dire sur les lignes, nous supposerons que les figures dans lesquelles nous les considérerons, sont tracées sur une surface *plane*. On appelle ainsi une surface à laquelle on peut appliquer exactement une ligne droite dans tous les sens.

6. De toutes les lignes courbes, nous ne considérons dans ces Élémens, que *la circonférence du Cercle*. On appelle ainsi une ligne courbe *BCFDG* (*fig.* 3) dont tous les points sont également éloignés d'un même point *A*, pris dans le plan sur lequel elle est tracée. Le point *A* se nomme le *Centre;* les lignes droites *AB*, *AC*, *AF*, etc. qui vont de ce point à la circonférence, se nomment *rayons;* et tous ces rayons sont égaux, puisqu'ils mesurent la distance du centre à chaque point de la circonférence.

Les lignes, comme *BD*, qui passant par le centre, se terminent de part et d'autre à la circonférence, sont appelées *diamètres;* comme chaque diamètre est composé de deux rayons, tous les diamètres sont donc égaux. Il est d'ailleurs évident que tout diamètre partage la circonférence en deux parties parfaitement égales; car si l'on conçoit la figure pliée de façon que le pli soit dans le

Digitized by Google

diamètre *BD*, tous les points de *BGD* doivent s'appliquer sur *BCED*, sans quoi il y auroit des points de la circonférence qui seroient inégalement éloignés du centre.

Les portions *BC*, *CE*, *ED*, etc. de la circonférence, se nomment *arcs;* et ce qu'on appelle *cercle*, c'est la surface même renfermée par la circonférence *BCFDGB*.

Une droite, comme *DF*, qui va de l'extrémité *D* d'un arc, à l'autre extrémité *F*, s'appelle *corde* ou *soutendante* de cet arc.

7. Il est aisé de voir que *les cordes égales d'un même cercle ou de cercles égaux, soutendent des arcs égaux, et réciproquement.* Car si la corde *DG* est égale à la corde *DF*, en imaginant qu'on transporte la corde *DG* et son arc, pour appliquer la corde *DG* sur la corde *DF*, il est visible que le point *D* étant commun, et le point *G* tombant alors sur le point *F*, tous les points de l'arc *DG* doivent tomber sur l'arc *DF*, puisque si quelqu'un de ces points ne tomboit pas sur l'arc *DF*, l'arc *DG* n'auroit pas tous ses points également éloignés du centre *A*.

8. On est convenu de partager toute circonférence de cercle, grande ou petite, en 360 parties égales auxquelles on a donné le nom de *degrés*. On partage le degré en 60 parties égales qu'on appelle *minutes;* chaque minute en 60

Digitized by Google

parties égales qu'on appelle *secondes*; et de toujours subdiviser de 60 en 60, en donnant aux parties, consécutivement, les noms *minutes*, *secondes*, *tierces*, *quartes*, *quintes*, *etc.*

La marque du degré est celle-ci..........	^{d} ou ^{o}
Celle de la minute....................	$'$
De la seconde.......................	$''$
De la tierce.........................	$'''$
De la quarte.........................	^{iv}

Ainsi pour marquer 3 degrés 24 minutes 55 secondes, on écrit $3^{d}\ 24'\ 55''$.

Des Angles et de leur Mesure.

9. Deux lignes *AB*, *AC* qui se rencontrent, peuvent former entr'elles une ouverture plus ou moins grande, comme on le voit dans les *figures* 4, 6 et 7.

Cette ouverture *BAC*, est ce qu'on appelle un *angle*; et cet angle est dit angle *rectiligne*, ou *curviligne*, ou *mixtiligne*, selon que les lignes qui le comprennent sont, ou toutes deux lignes droites, ou toutes deux lignes courbes, ou l'une, une ligne droite, et l'autre une ligne courbe.

Nous ne parlons, pour le présent, que des angles rectilignes.

10. Pour se former une idée exacte d'un angle, il faut concevoir que la ligne droite *AB* étoit

d'abord couchée sur *A C*, et qu'on l'a fait tourner sur le point *A* (comme une branche de compas sur sa charnière), pour l'amener dans la position *A B* qu'elle a actuellement. La quantité dont *A B* a tourné, est précisément ce qu'on appelle un *angle*.

D'après cette idée, on conçoit que la grandeur d'un angle ne dépend point de celle de ses côtés, en sorte que l'angle formé par les lignes *A C*, *A B*, (*fig.* 4), est absolument le même que celui que forment les lignes *A F* et *A E*, qui sont une extension de celles-là ; en effet, la ligne *A B* et la ligne *A E* ont dû tourner chacune de la même quantité, pour venir dans leur position actuelle.

Le point *A* où se rencontrent les deux lignes *A B*, *A C*, s'appelle le *sommet de l'angle*, et les deux lignes *A B*, *A C*, en sont les côtés.

Pour désigner un angle, nous emploierons trois lettres, dont l'une marque le sommet, et les deux autres sont placées le long des côtés ; et en énonçant ces lettres, nous placerons toujours celle du sommet au milieu ; ainsi, pour désigner l'angle compris par les deux lignes *A B*, *A C*, nous dirons l'angle *B A C* ou *C A B*.

Cette attention est principalement nécessaire lorsque plusieurs angles ont leur sommet au même point ; car si dans la *figure* 4, par exemple, on disoit simplement l'angle *A*, on ne sauroit si l'on veut parler de l'angle *B A C*, ou de l'angle *B A D*, mais lorsqu'il n'y a qu'un seul angle, comme dans la *figure* 5, on peut dire simplement l'angle *a* ; c'est-à-dire, le désigner par la lettre de son sommet.

11. Puisque l'angle *BAC* (*fig.* 4), n'est autre chose que la quantité dont le côté *AB* auroit dû tourner sur le point *A*, pour venir de la position *AC* dans la position *AB*, et que dans ce mouvement chaque point de *AB*, le point *B*, par exemple, restant toujours également éloigné de *A*, décrit nécessairement un arc de cercle, qui augmente ou diminue précisément dans le même rapport que l'angle augmente ou diminue; il est naturel de prendre cet arc pour mesure de l'angle; mais comme chaque point de *AB* décrit un arc de longueur différente, ce n'est point la longueur même de l'arc qu'il faut prendre, mais le nombre de ses dégrés et parties de dégré, qui sera toujours le même pour chaque arc décrit par chaque point de *AB*, puisque tous ces points commençant, continuant et finissant leur mouvement dans le même temps, font nécessairement le même nombre de pas; toute la différence qu'il y a, c'est que les points les plus éloignés du point *A*, sont des pas plus grands. Nous pouvons donc dire que. . . .

12. *Un angle quelconque*, BAC (fig. 4) *a pour mesure le nombre des degrés et parties de degré, de l'arc compris entre ses côtés, et décrit de son sommet comme centre.*

Ainsi, quand par la suite nous dirons, un tel angle a pour mesure un tel arc; on doit entendre qu'il a pour

mesure le nombre des degrés et parties de degré de cet arc.

13. Donc, *pour diviser un angle en plusieurs parties égales*, il ne s'agit que de diviser l'arc qui lui sert de mesure, en autant de parties égales, et de tirer par les points de division, des lignes au sommet de cet angle. Nous parlerons plus bas de la division des arcs.

14. Et *pour faire un angle égal à un autre*; par exemple, pour faire au point *a* de la ligne *a c* (*fig.* 5), un angle égal à l'angle *B A C* (*fig.* 4) il faut, d'une ouverture de compas arbitraire, et du point *a* comme centre, décrire un arc indéfini *c b*; posant ensuite la pointe du compas sur le sommet *A* de l'angle donné *B A C*, on décrira, de la même ouverture, l'arc *B C* compris entre les deux côtés de cet angle, et ayant pris avec le compas, la distance de *C* à *B*, on la portera de *c* en *b*, ce qui donnera le point *b* par lequel, et par le point *a* tirant la ligne *a b*; on aura l'angle *b a c* égal à *B A C*.

En effet, l'angle *b a c* a pour mesure *b c* (12), et l'angle *B A C* a pour mesure *B C*. Or ces deux arcs sont égaux, puisqu'appartenant à des cercles égaux, ils ont d'ailleurs des cordes égales (7); car la distance de *b* à *c*, a été faite la même que celle de *B* à *C*.

15. L'angle *B A C* (*fig.* 6) se nomme angle *droit*, lorsque l'un *A B* de ses côtés ne penche ni vers l'autre côté *A C*, ni vers son prolongement *A D*.

On l'appelle angle *aigu* (*fig.* 4) lorsque l'un *A B* de ses côtés penche plus vers l'autre côté *A C*, que vers son prolongement *A D*.

Enfin on l'appelle *obtus* (*fig.* 7), lorsqu'un côté *AB* penche plus vers le prolongement de l'autre côté *AC*, que vers ce côté même.

16. Concluons de ce qui a été dit (12) sur la mesure des angles, 1°. qu'*un angle droit a pour mesure* 90ᵈ; *un angle aigu, moins que* 90ᵈ; *et un angle obtus, plus que* 90ᵈ.

Car si la ligne *AE* (*fig.* 3) ne penche ni vers *AB*, ni vers son prolongement *AD*, les deux angles *BAE*, *DAE* seront égaux; donc les arcs *BE* et *DE* qui leur servent de mesure, seront aussi égaux; or ces deux arcs composant ensemble la demi-circonférence, valent ensemble 180ᵈ; donc chacun d'eux est de 90ᵈ; donc aussi les deux angles *BAE*, *DAE* sont chacun de 90ᵈ.

D'après cela il est évident que *BAC* est de moins, et *BAF* de plus que 90ᵈ.

17. 2°. *Les deux angles* BAC, BAD, (*fig.* 4, 6 et 7) *que forme une ligne droite* AB *tombant sur une autre droite* CD, *valent toujours ensemble* 180ᵈ. Car on peut toujours regarder le point *A* (*fig.* 4) comme le centre d'un cercle, dont *CD* est alors un diamètre : or les deux angles *BAC* et *BAD* ont pour mesure les deux arcs *BC* et *BD* qui composent la demi-circonférence; ils valent donc ensemble 180ᵈ, ou autant que les deux angles droits.

18. 3°. *Que si d'un même point* A (fig. 3) *on tire tant de droites* AC, AE, AF, AD, AG, etc. *qu'on voudra; tous les angles* BAC, CAE, EAF, FAD, DAG, GAB *qu'elles comprennent, ne feront jamais que* 360^{d} : car ils ne peuvent occuper plus que la circonférence.

19. Deux angles tels que *BAC* et *BAD* (*fig.* 4) qui pris ensemble font 180 degrés, sont dits *supplément* l'un de l'autre; ainsi *BAC* est le supplément de *BAD*, et *BAD* est le supplément de *BAC;* parce que l'un de ces angles est ce qu'il faudroit ajouter à l'autre pour faire 180 degrés.

Les angles égaux auront donc des supplémens égaux; et ceux qui auront des supplémens égaux, seront égaux.

20. Concluons de-là *que les angles* BAC, EAD, (fig. 8) *opposés au sommet, et formés par les deux droites* BD *et* EC, *sont égaux.*

Car *BAC* a pour supplément *CAD*, et *EAD* a aussi pour supplément *CAD*.

21. On appelle *complément* d'un angle ou d'un arc, ce dont cet arc est plus petit ou plus grand que 90 degrés. Ainsi (*fig.* 3), l'angle *BAC* a pour complément *CAE;* l'angle *BAF* a pour complément *FAE*. Le complément est donc ce qu'il faut

ajouter à un angle, ou ce qu'il en faut retrancher pour qu'il vaille 90 degrés.

Les angles aigus qui auront des complémens égaux, seront donc égaux, et réciproquement; il en sera de même des angles obtus.

On rencontre sans cesse les angles, tant dans la théorie que dans la pratique. C'est par les angles qu'on détermine les positions des objets les uns à l'égard des autres; les angles flanqués, les angles d'épaule et de courtine, servent à déterminer la position des différentes lignes d'un front de fortification. Le tir du canon est réglé par l'angle que la ligne de mire fait avec le prolongement de l'axe de la pièce.

Les instrumens qui servent à mesurer les angles, ou à former des angles tels qu'on le juge à propos, sont en assez grand nombre; nous ne ferons connoître ici, que le *rapporteur;* on trouvera la description de ceux qui peuvent avoir rapport à notre objet, sur la fin de ce volume, à la Trigonométrie.

22. L'instrument représenté par la *figure* 9, et qu'on appelle *Rapporteur*, sert à mesurer les angles sur le papier, et à former sur le papier les angles dont on peut avoir besoin. L'usage en est commode et fréquent. C'est un demi-cercle de cuivre ou de corne, divisé en 180 degrés. Le centre de cet instrument est marqué par une petite échancrure *C*. Quand on veut mesurer un angle tel que *BAC* (*fig.* 4, 6 *et* 7), on applique le centre *C* sur le sommet *A* de l'angle qu'on veut mesurer, et le rayon *CB* du même instrument, sur l'un *AC* des côtés de cet angle; alors le côté *AB* prolongé, s'il est nécessaire, fait connoître par celle des divisions de l'instrument, par laquelle il passe, de

combien de degrés est l'arc du rapporteur compris entre les côtés de l'angle *BAC*, et par conséquent (12) de combien de degrés est cet angle *BAC*.

Pour faire, avec le même instrument, un angle d'un nombre déterminé de degrés ; on applique le rayon *CB* de l'instrument sur la ligne qui doit servir de côté à l'angle qu'on veut former, et de manière que le centre *C* soit sur le point où cet angle doit avoir son sommet ; puis cherchant sur les divisions de l'instrument, le nombre de degrés en question, on marque sur le papier, un point en cet endroit; par ce point et par le sommet, on tire une ligne droite qui fait alors avec la première, l'angle demandé.

Des Perpendiculaires et des Obliques.

23. Nous avons dit (15) que la ligne *AB* (*fig.* 6) qui ne penche ni vers *AC*, ni vers *AD*, formoit avec ces deux parties des angles qu'on appelle *droits*.

Cette même ligne *AB* est aussi ce qu'on appelle *une Perpendiculaire* à la ligne *AC* ou *DC*, ou *AD*.

D'après cette définition, on doit regarder comme vérités évidentes, les trois propositions suivantes.

24. 1.° *Quand une ligne* AB (fig. 10) *est perpendiculaire sur une autre ligne* CD, *celle-ci est aussi perpendiculaire sur la ligne* AB.

Car lorsque *AB* est perpendiculaire sur *CD*,

Digitized by Google

les angles *AEC*, *AED* sont égaux ; or *AED* est égal à *BEC* (20); donc *AEC* est égal à *BEC*; donc la ligne *CE* ou *CD* ne penche ni vers *AE*, ni vers *BE* ; donc elle est perpendiculaire à *AB*.

25. 2°. *D'un même point* E *pris dans une ligne* CD, *on ne peut élever qu'une seule perpendiculaire à cette ligne.*

26. 3°. *Et d'un même point* A, *pris hors d'une ligne* CD, *on ne peut abaisser qu'une seule perpendiculaire à cette ligne.*

Car on conçoit qu'il n'y a qu'un seul cas où une ligne passant par le point *E* ou par le point *A*, puisse ne pencher ni vers *ED*, ni vers *EC*.

27. *Les lignes qui partant du point* A *s'écarteront également de la perpendiculaire, seront égales; et plus ces lignes s'écarteront de la perpendiculaire, plus elles seront longues, et par conséquent la perpendiculaire est la plus courte de toutes.*

Supposons que *EG* soit égale à *EF*; si l'on renverse la figure *AEG* sur la figure *AEF*, la ligne *AE* restant commune à toutes les deux, il est clair qu'à cause de l'angle *AEG* égal à *AEF*, la ligne *EG* s'appliquera sur *EF*, et que le point *G* tombera sur le point *F*, puisque *EG* est supposé égal à *EF*; donc *AG* s'appliquera exactement sur *AF*; donc ces deux lignes sont

égales. Quant à la seconde partie de la proposition, il est évident que le point *C* de la ligne *CE*, étant supposé plus loin de *AB*, que le point *F* de la même ligne *CE*, est nécessairement plus éloigné de tel point de *AB* qu'on voudra, que le point *F* ne peut l'être du même point ; donc *AC* est plus grande que *AF* ; donc aussi la perpendiculaire est la plus courte de toutes.

28. Les lignes *AF*, *AC*, *AG*, sont dites *obliques* à l'égard de la perpendiculaire *AE* et de la ligne *CD* ; et en général, une ligne est oblique à une autre, quand elle fait, avec cette autre, un angle ou aigu ou obtus.

29. Puisque (27) les obliques *AF*, *AG* sont égales lorsqu'elles s'éloignent également de la perpendiculaire, il faut en conclure, que *lorsqu'une ligne est perpendiculaire sur le milieu* E *d'une autre ligne* FG, *chacun de ses points est autant éloigné de l'extrémité* F, *que de l'extrémité* G ; car il est évident que ce qu'on a dit du point *A* s'applique également à tout autre point de la ligne *AE* ou *AB*.

30. Il n'est pas moins évident qu'*il n'y a que les points de la perpendiculaire* AE *sur le milieu de* FG, *qui puissent être également éloignés de* F *et*

Digitized by Google

et de G ; car tout point qui sera à droite ou à gauche de la perpendiculaire , est évidemment plus près de l'un de ces points , que de l'autre.

Donc pour qu'une ligne soit perpendiculaire sur une autre , il suffit qu'elle passe par deux points dont chacun soit également éloigné de deux points pris dans cet autre.

31. Concluons de-là 1°. que *pour élever une perpendiculaire sur le milieu d'une ligne* A B (*fig.* 11), il faut poser une pointe du compas en *B*, et d'une ouverture plus grande que la moitié de *AB* tracer un arc *IK*; poser ensuite la pointe du compas en *A*, et de la même ouverture, tracer un arc *LM* qui coupe le premier au point *C* qui sera également éloigné de *A* et de *B*. On déterminera ensuite, de la même manière, un autre point *D*, soit au-dessous, soit au-dessus de *AB*, et en prenant la même ou une autre ouverture de compas. Enfin on tirera par les deux points *C* et *D* la ligne *CD* qui (30) sera perpendiculaire sur le milieu de *AB*.

32. 2°. *Si d'un point* E, *pris hors de la ligne* A B (fig. 12), *on veut mener une perpendiculaire à cette ligne*, on placera la pointe du compas en *E*, et d'une ouverture plus grande que la plus courte distance à la ligne *AB*, on tracera avec l'autre pointe deux petits arcs qui coupent *AB* aux points *C* et *D*; puis de ces deux points comme centres, et d'une ouverture de compas plus grande que la moitié de *CD*, on tracera deux arcs qui se coupent en un point *F*, par lequel et par le point *E*, on tirera la ligne *EF*, qui sera perpendiculaire sur *AB* (30), puisqu'elle aura deux points *E* et *F* également éloignés, chacun, des deux points *C* et *D* de la ligne *AB*.

Digitized by Google

33. Si le point *E*, par lequel on veut que la perpendiculaire passe, étoit sur la ligne même *A B*, on opéreroit encore de la même manière : *voyez figure* 13.

Enfin si le point *E* étoit tellement placé qu'on ne pût marquer commodément qu'un des deux points *C* ou *D*, on prolongeroit la ligne *A B*, et on opéreroit encore de même : *voyez figures* 14 *et* 15. La *figure* 15 est pour le cas où l'on veut élever une perpendiculaire à l'extrémité de la ligne *A B*.

34. Lorsqu'on a plusieurs perpendiculaires à tracer; pour abréger et pour éviter en même-temps la confusion qui pourroit naître de la multitude des traits dont il faudroit alors charger le dessin, on emploie un instrument, construit et vérifié d'après les méthodes précédentes ; c'est l'équerre qui est formée, tantôt de deux règles perpendiculaires l'une à l'autre, et assemblées par une charnière, pour pouvoir être pliées l'une sur l'autre lorsqu'on n'en fait point usage, tantôt d'une seule pièce de bois ou de cuivre, dont deux côtés sont perpendiculaires l'un à l'autre. On applique une des règles ou l'un des côtés de l'équerre sur la ligne proposée, en observant de faire glisser ce côté jusqu'à ce que le second passe par le point donné ; alors faisant glisser le crayon ou la plume le long du second côté de l'équerre, on a la perpendiculaire demandée.

35. Sur le terrein où l'on opère en grand, on substitue au compas, des perches ou des cordeaux ; mais quand on fait usage de ces derniers, il faut avoir l'attention de leur donner la même tension autant qu'il est possible, pendant la même opération. Pour donner une idée de la manière dont on les emploie, supposons qu'il s'agisse de placer le heurtoir d'une batterie (*fig.* 16).

Comme c'est la pièce contre laquelle les roues de l'affût

doivent porter quand on met le canon en batterie, elle doit être perpendiculaire à la ligne du tir, et par conséquent à la ligne du milieu de l'embrasure.

Pour lui donner cette disposition, on tracera sur sa surface, et parallèlement à sa longueur, une ligne *E C*, sur laquelle on prendra arbitrairement les parties égales *A B*, *A C*, et l'on placera le point *A* sur la ligne du tir; ayant fixé aux points *B* et *C* deux cordeaux d'égale longueur, on fera tourner le heurtoir sur le point *A*, jusqu'à ce que leurs extrémités puissent se réunir en un même point *D* sur la ligne du tir. Le heurtoir *B C* sera perpendiculaire à la ligne du tir.

Des Parallèles.

36. Deux lignes droites, tracées sur un même plan, sont dites *parallèles*, lorsqu'elles ne peuvent jamais se rencontrer, à quelque distance qu'on les imagine prolongées.

Deux lignes parallèles ne font donc point d'angle entr'elles.

Donc, *deux parallèles sont par-tout également éloignées l'une de l'autre*; c'est-à-dire que la perpendiculaire menée entr'elles, est par-tout la même; car il est évident que si en quelqu'endroit elles se trouvoient plus près qu'en un autre, elles seroient inclinées l'une à l'autre, et par conséquent elles pourroient enfin se rencontrer.

D'après ces notions, il est aisé d'établir les cinq propositions suivantes.

37. 1°. *Lorsque deux lignes parallèles* AB *et* CD (fig. 17), *sont coupées par une troisième ligne* EF, *qu'on appelle alors* sécante, *les angles* BGE, DHE *ou* AGH, CHF *qu'elles forment d'un même côté, avec cette ligne, sont égaux;* car les lignes *AB* et *CD* n'ayant aucune inclinaison entre elles (36), doivent nécessairement être également inclinées d'un même côté, chacune à l'égard de toute ligne à laquelle on les comparera.

38. 2°. *Les angles* AGH, GHD, *sont égaux.* Car on vient de voir que *AGH* est égal à *CHF;* or *CHF* (20) est égal à *GHD;* donc *AGH* est égal à *GHD.*

39. 3°. *Les angles* BGE, CHF, *sont égaux.* Car *BGE* est égal à *AGH* (20); or on a vu (37) que *AGH* est égal à *CHF;* donc *BGE* est égal à *CHF.*

40. 4°. *Les angles* BGH, DHG *ou* AGH, CHG *sont supplémens l'un de l'autre.* Car *BGH* est supplément de *BGE* qui (37) est égal à *DHG.*

41. 5.° *Les angles* BGE, DHF *ou* AGE, CHF *sont supplémens l'un de l'autre;* car *DHF* a pour supplément *DHG* qui (37) est égal à *BGE.*

42. Chacune de ces cinq propriétés a toujours

lieu, lorsque deux lignes parallèles sont rencontrées par une troisième ; et réciproquement *toutes les fois que deux lignes droites, auront dans leur rencontre avec une troisième, l'une quelconque de ces cinq propriétés, on doit conclure qu'elles sont parallèles*, cela se démontre d'une manière absolument semblable.

On a donné aux angles dont nous venons d'examiner les propriétés, des noms qui peuvent servir à fixer ces propriétés dans la mémoire. Les angles *BGE*, *FHC* se nomment *alternes externes*, parce qu'ils sont de différens côtés de la ligne *EF*, et qu'ils sont tous deux hors des parallèles. Les angles *AGH*, *GHD* s'appellent *alternes internes*, parce qu'ils sont de différens côtés de la ligne *EF*, et tous deux entre les parallèles. Les angles *BGH*, *DHG* s'appellent *internes d'un même côté*, parce qu'ils sont entre les parallèles, et d'un même côté de la sécante *EF*. Enfin les angles *BGE*, *DHF* se nomment *externes d'un même côté*, parce qu'ils sont hors des parallèles et d'un même côté de la sécante.

43. Des propriétés que nous venons de démontrer, on peut conclure, *que si deux angles* ABC, DEF (fig. 18) *tournés d'un même côté ont leurs côtés parallèles, ils seront égaux.* Car si l'on imagine le côté *DE* prolongé jusqu'à ce qu'il rencontre *BC* en *G*, les angles *ABC*, *DGC* seront égaux (37), et par la même raison l'angle *DGC* sera égal à l'angle *DEF* ; donc *ABC* est égal à *DEF*.

44. De ces mêmes propriétés on peut aussi conclure, que *pour mener, par un point donné* C, *une ligne* CD, (fig. 19) *parallèle à une ligne* AB; il faut, par le point *C*, tirer arbitrairement la ligne indéfinie *CEF* qui coupe *AB* en un point quelconque *E;* mener selon ce qui a été enseigné (14), par le point *C*, la ligne *CD* qui fasse avec *CE*, l'angle *ECD* égal à l'angle *FEB* que celle-ci fait avec *AB;* la ligne *CD* tirée de cette manière, sera parallèle à *AB* (37).

45. Lorsqu'on a plusieurs parallèles à mener, on peut, pour abréger, et pour éviter la multitude des traits, faire de l'équerre l'usage suivant.

On placera un côté de l'équerre sur la droite donnée, et tenant l'autre côté appliqué contre une règle immobile, on fera glisser l'équerre le long de cette règle, jusqu'à ce que le premier côté passe par le point donné; la ligne tracée le long de ce même côté sera la parallèle demandée.

46. Sur le terrein, pour mener une parallèle à une ligne donnée, on s'y prend assez communément, en faisant en sorte que les deux lignes soient toutes deux perpendiculaires à une troisième; c'est ainsi que si l'on demandoit (*fig.* 20) de mener une parallèle à l'une des faces d'un bastion, et à une distance de 200 toises, on prendroit sur le prolongement de la face de ce bastion un point *F*, duquel on éleveroit sur ce prolongement même une perpendiculaire *FA* longue de 200 toises, et à l'extrémité *A* de celle-ci, on éleveroit une perpendiculaire *AB*, qui seroit la parallèle demandée.

Au reste chacune des cinq propriétés établies ci-dessus, peut fournir une manière de mener une parallèle.

Digitized by Google

Des Lignes droites considérées par rapport à la circonférence du Cercle, et des circonférences de Cercle considérées les unes à l'égard des autres.

47. La courbure uniforme du cercle met en droit de conclure, sans qu'il soit besoin d'en donner une démonstration rigoureuse. . . .

1°. Que *une ligne droite ne peut rencontrer une circonférence en plus de deux points.*

2°. Que *dans un demi-cercle, la plus grande corde soutend toujours le plus grand arc, et réciproquement.*

On appelle en général, *sécante* (*fig.* 21), toute ligne, comme *DE*, qui rencontre le cercle en deux points et qui est en partie au dehors; et on appelle *tangente*, celle qui ne fait que s'appliquer contre la circonférence; telle est *AB*.

48. *Une tangente ne peut rencontrer la circonférence qu'en un seul point.* Car si elle la rencontroit en deux points, elle entreroit dans le cercle, puisque de ces deux points il seroit possible de tirer au centre deux rayons ou lignes égales, entre lesquelles on peut toujours concevoir une perpendiculaire sur la ligne qui joint ces deux points; et comme cette perpendiculaire (27) est plus courte

que chacun des deux rayons, on voit que la tangente auroit des points plus près du centre que ceux où elle rencontre le cercle, elle entreroit donc dans le cercle ; ce qui est contre la définition que nous venons d'en donner.

La tangente n'ayant qu'un point de commun avec le cercle, il s'ensuit que le rayon *CA* (*fig.* 22) qui va au point d'attouchement, est la plus courte ligne qu'on puisse tirer du centre à la tangente ; que par conséquent (27) il est perpendiculaire à la tangente. Donc réciproquement *la tangente en un point quelconque* A *du cercle, est perpendiculaire à l'extrémité du rayon* CA *qui passe par ce point.*

49. On voit donc que *pour mener une tangente en un point donné* A *sur le cercle*, il faut tirer à ce point un rayon *CA*, et mener à son extrémité une perpendiculaire, suivant la méthode donnée (33).

50. Donc *si plusieurs cercles* (fig. 23) *ont leurs centres sur la même ligne droite* CA, *et passent tous par le même point* A, *ils auront tous pour tangente commune la ligne* TG *perpendiculaire à* CA, *et se toucheront par conséquent tous.*

51. Ainsi, *pour décrire un cercle d'une grandeur déterminée, et qui touche un cercle donné* BAD (fig. 24) *en un point donné* A, il faut, par le centre *C* et par le point *A*, tirer le rayon *CA* qu'on prolongera indéfiniment ; puis du point *A* vers *T* ou vers *V* (selon qu'on voudra que l'un des cercles

Digitized by Google

embrasse l'autre ou ne l'embrasse point), porter la grandeur du rayon du second cercle; après quoi du centre *T* ou *V*, et du rayon *TA* ou *VA*, on décrira la circonférence *EF*.

52. *La perpendiculaire élevée sur le milieu d'une corde, passe toujours par le centre du cercle, et par le milieu de l'arc soutendu par cette corde* (fig. 25).

Car elle doit passer par tous les points également éloignés des extrémités *A* et *B* (30); or il est évident que le centre est également éloigné des deux extrémités *A* et *B* qui sont deux points de la circonférence; donc elle passe par le centre.

Il n'est pas moins évident qu'elle doit passer par le milieu de l'arc; car si *E* est le milieu de l'arc, les arcs égaux *AE*, *BE* ayant des cordes égales (7), le point *E* est également éloigné de *A* et de *B*; donc la perpendiculaire doit passer par le point *E*.

53. Le centre, le milieu de l'arc, et le milieu de la corde, étant tous trois sur une même ligne droite, toutes les fois qu'une ligne droite passera par deux de ces trois points, on pourra conclure qu'elle passe par le troisième.

Et comme on ne peut mener qu'une seule perpendiculaire sur le milieu de la corde, on doit encore conclure que si une perpendiculaire sur

une corde, passe par l'un quelconque de ces trois points, elle passe nécessairement par les deux autres.

De ces propriétés on peut conclure,

54. 1°. *Le moyen de diviser un angle ou un arc en deux parties égales.*

Pour diviser l'angle *BAC* (*fig.* 26) en deux parties égales, on décrira de son sommet *A* comme centre, et d'un rayon arbitraire, l'arc *DE*; puis des points *D* et *E* pris successivement pour centres, et d'un même rayon, on tracera deux arcs qui se coupent en un point *G* par lequel et par le point *A* on tirera *AG* qui (30), étant perpendiculaire sur le milieu de la corde *DE*, divisera en deux parties égales l'arc *DIE* (52), et par conséquent aussi l'angle *BAC*, puisque les deux angles partiels *BAG*, *CAG* ont (12) pour mesure les deux arcs égaux *DI*, *EI*.

55. 2°. *Le moyen de faire passer une circonférence de cercle par trois points donnés qui ne soient pas en ligne droite.*

Soient *A*, *B*, *C* (*fig.* 27) ces trois points; en tirant les lignes droites *AB*, *BC*, elles seront deux cordes du cercle qu'il s'agit de décrire.

Élevez une perpendiculaire (31) sur le milieu de *AB*, faites la même chose sur le milieu de *BC*; le point *I* où se couperont ces deux perpendiculaires, sera le centre. Car ce centre doit être sur *DE* (52), et, par la même raison, il doit être sur *FG*; il doit donc être à leur rencontre *I* qui est le seul point commun qu'aient ces deux lignes.

56. S'il était question de *retrouver le centre d'un cercle ou*

Digitized by Google

d'un arc déjà décrit, on voit donc qu'il n'y auroit qu'à marquer trois points à volonté sur cet arc, et opérer comme on vient de l'enseigner.

57. Puisqu'on ne trouve qu'un seul point *I* qui satisfasse à la question, il faut en conclure, que par trois points donnés, on ne peut faire passer qu'un seul cercle, et par conséquent que *deux circonférences de cercle ne peuvent se rencontrer en trois points sans se confondre.*

58. 3°. *Le moyen de faire passer par un point donné* B, (fig. 28 et 29) *une circonférence de cercle, qui en touche une autre, dans un point donné* A.

Il faut, par le centre *C* de la circonférence donnée, et par le point *A* où l'on veut qu'elle soit touchée, tirer le rayon *CA* qu'on prolongera de part ou d'autre, selon qu'il sera nécessaire; joindre le point *A* au point *B*, par lequel on veut que passe la circonférence cherchée, et élever sur le milieu de *AB* une perpendiculaire *MN* qui coupera *AC*, ou son prolongement en *D*. Ce point *D* sera le centre, et *AD* ou *BD* sera le rayon du cercle demandé, car puisque la circonférence qu'on veut décrire doit passer par le point *A* et par le point *B*, son centre doit être sur *MN* (52); d'ailleurs, puisque cette même circonférence doit toucher en *A*, son centre doit être sur *CA* (50) ou sur son prolongement; il est donc au point d'intersection de *CA* et de *MN*.

59. Si, au lieu d'une circonférence, c'étoit une ligne droite qu'il s'agit de faire toucher en un point donné *A*, (*fig*, 30), par un cercle passant par un point donné *B*, l'opération seroit la même, avec cette seule différence que la ligne *AC* seroit une perpendiculaire élevée au point *A* sur cette droite.

60. 4°. *Deux cordes parallèles* AB, CD, (fig. 31) *interceptent, entre elles, des arcs égaux* AC, BD.

Car la perpendiculaire *GI* qu'on abaisseroit du centre *G* sur *AB*, doit (52) diviser, en deux parties égales, chacun des deux arcs *AIB*, *CID*, puisqu'elle sera, en même temps, perpendiculaire sur *AB*, et sur sa parallèle *CD*; donc si des arcs égaux *AI*, *BI* on retranche les arcs égaux *CI*, *DI*, les arcs restans *AC*, *BD*, doivent être égaux.

Concluons de-là, que quand une tangente *HK* est parallèle à une corde *AB*, le point d'attouchement *I* est précisément au milieu de l'arc *AIB*.

61. Les propositions que nous avons établies (50, 58 et 59), ont leur application dans la fortification et dans le tracé des bouches à feu, et de plusieurs attirails d'artillerie; il y est souvent question d'arcs qui doivent se toucher, ou toucher des lignes droites, et passer par des points donnés.

Des Angles considérés dans le cercle.

62. Nous avons vu ci-dessus (12) quelle est, en général, la mesure des angles. Ce que nous nous proposons ici, n'est point de donner une nouvelle manière de les mesurer, mais d'exposer quelques propriétés qui peuvent nous être fort utiles par la suite, tant pour exécuter certaines

opérations, que pour faciliter quelques démonstrations.

63. *Un angle* MAN (fig. 32 et 33) *qui a son sommet à la circonférence, et qui est formé par deux cordes, ou par une tangente et par une corde, a toujours pour mesure la moitié de l'arc* BFED, *compris entre ses côtés.*

Si le centre *C* est entre les côtés de l'angle, menez par le centre *C*, le diamètre *FH* parallèle au côté *AM*, et le diamètre *GE* parallèle au côté *AN*; l'angle *MAN* (43) est égal à l'angle *FCE*; il aura donc la même mesure que celui-ci qui a son sommet au centre, c'est-à-dire, qu'il aura pour mesure l'arc *FE*; il ne s'agit donc que de faire voir que l'arc *FE* est la moitié de l'arc BFED. Or *BF* est égal à *AH* (60), à cause des parallèles *AM*, *HF*; et à cause des parallèles *AN* et *GE*, l'arc *ED* est égal à *AG*; donc *ED* plus *BF*, valent *AG* plus *AH*, c'est-à-dire, *GH*; mais *GH*, comme mesure de l'angle *GCH*, doit être égal à *FE*, mesure de l'angle *FCE*, qui (20) est égal à *GCH*; donc *BF* plus *ED*, valent *FE*; donc *FE* est la moitié de *BFED*; donc l'angle *MAN* a pour mesure la moitié de l'arc *BFED* qu'il comprend entre ses côtés.

Mais si le centre étoit hors des côtés, comme il arrive pour l'angle *MAN* (*fig.* 37), il n'en

seroit pas moins vrai que cet angle auroit pour mesure la moitié de l'arc *B D* compris entre ses côtés. Car en imaginant la tangente *A E*, l'angle *M A N* vaut *M A E* moins *N A E*; il a donc pour mesure la différence des mesures de ces deux angles; c'est-à-dire (puisque le centre est entre leurs côtés), la moitié de *B F A* moins la moitié de *D F A* ou la moitié de *B D*.

64. Donc, 1°. *tous les angles* BAE, BCE, BDE, (fig. 34) *qui, ayant leur sommet à la circonférence, comprendront entre leurs côtés, le même arc ou des arcs égaux, seront égaux.* Car ils auront chacun pour mesure la moitié du même arc *B E* (63).

65. 2°. *Tout angle* BAC (fig. 35) *qui aura son sommet à la circonférence, et dont les côtés passeront par les extrémités d'un diamètre, sera droit ou de* 90 degrés; car il comprendra alors entre ses côtés la demi-circonférence *B O C* qui est de 180 degrés; et comme il doit en avoir la moitié pour mesure (63), il sera donc de 90 degrés.

66. La proposition qu'on vient de démontrer (65) peut, entre plusieurs autres usages, avoir les deux suivans.

67. 1°. *Pour élever une perpendiculaire à l'extrémité* B *d'une ligne* FB (*fig.* 36), lorsqu'on ne peut prolonger assez cette ligne, pour exécuter commodément ce qui a été enseigné (33) : voici le procédé.

D'un point *D* pris à volonté hors de la ligne *FB*, et d'une ouverture égale à la distance *DB*, décrivez la circonférence *ABCH* qui coupe *FB* en quelque point *A*; par ce point et par le centre *D*, tirez le diamètre *ADC*; du point *C* où ce diamètre coupe la circonférence, menez au point *B* la ligne *CB*; elle sera perpendiculaire à *FB*. Car l'angle *CBA* qu'elle forme avec *FB*, a son sommet à la circonférence, et ses côtés passent par les extrémités du diamètre *AC*; cet angle est donc droit (65); donc *CB* est perpendiculaire sur *FB*.

68. 2°. *Pour mener d'un point donné* E (fig. 38), *hors du cercle* ABD, *une tangente à la circonférence de ce cercle.* Joignez le centre *C* et le point *E* par la droite *CE*: décrivez sur *CE* comme diamètre, la circonférence *CAED*: elle coupera la circonférence *ABD*, en deux points *A* et *D*, par chacun desquels et par le point *E*, tirant les lignes *DE* et *AE*, vous aurez les deux tangentes qu'on peut mener du point *E* à la circonférence *ABD*.

Pour se convaincre que ces lignes sont tangentes, il n'y a qu'à tirer les rayons *CD* et *CA*; les deux angles *CDE*, *CAE* ont chacun leur sommet à la circonférence *ACDE*, et les deux côtés de chacun passent par les extrémités du diamètre *CE*; donc (65) ces angles sont droits; donc *DE* et *AE* sont perpendiculaires à l'extrémité des rayons *CD* et *CA*; donc (49) ces lignes sont tangentes en *D* et en *A*.

69. Si l'on prolonge le côté *BA* (*fig.* 32) indéfiniment vers *I*, on aura un angle *NAI* qui aura aussi son sommet à la circonférence ; cet angle qui n'est point formé par deux cordes,

Digitized by Google

mais seulement par une corde et par le prolongement d'une autre corde, n'aura point pour mesure la moitié de l'arc *AD* compris entre ses côtés, mais la moitié de la somme des deux arcs *AD* et *AB* soutendus par le côté *AD* et par le côté *IA* prolongé ; car *DAI* valant avec *DAB*, deux angles droits, ces deux angles doivent avoir ensemble pour mesure la moitié de la circonférence ; or on vient de voir (63) que *DAB* avoit pour mesure la moitié de *DB* ; donc *DAI* a pour mesure la moitié de *AD* et la moitié de *AB*.

70. *Un angle* BAC (fig. 39) *qui a son sommet entre le centre et la circonférence, a pour mesure la moitié de l'arc* BC *compris entre ses côtés, plus la moitié de l'arc* DE *compris entre ces mêmes côtés prolongés.*

Du point *D* où *CA* prolongé, rencontre la circonférence, tirez *DF* parallèle à *AB* ; l'angle *BAC* est égal à *FDC* (37), et aura par conséquent la même mesure que celui-ci, c'est-à-dire, la moitié de l'arc *FBC* (63), ou la moitié de *BC* plus la moitié de *BF*, ou, à cause que (60) *BF* est égal à *DE*, la moitié de *BC* plus la moitié de *DE*

71. *Un angle* BAC (fig. 40) *qui a son sommet*

hors

Digitized by Google

hors du cercle, a pour mesure la moitié de l'arc concave BC *moins la moitié de l'arc convexe* ED *compris entre ses côtés.*

Du point *D* où *CA* rencontre la circonférence, tirez *DF* parallèle à *AB*.

L'angle *BAC* est égal à *FDC* (37); il aura donc même mesure que celui-ci, c'est-à-dire, la moitié de *CF*, ou la moitié de *CB* moins la moitié de *BF*, ou (à cause que *BF* est (60) égal à *ED*) la moitié de *CB* moins la moitié de *ED*.

72. On voit donc que quand les côtés d'un angle interceptent un arc de circonférence, si cet angle a pour mesure la moitié de l'arc compris entre ses côtés, il a nécessairement son sommet à la circonférence; car s'il l'avoit ailleurs, les propositions démontrées (70 et 71) feroient voir qu'il n'a point la moitié de cet arc pour mesure. Donc, de quelque façon qu'on pose un même angle, si ses côtés (*fig.* 34) passent toujours par les mêmes points *B* et *E* de la circonférence, son sommet sera toujours sur quelque point de la circonférence. Donc, si deux règles *AM*, *AN* (*fig.* 41) fixément attachées l'une à l'autre, roulent ensemble dans un même plan, en touchant continuellement deux points fixes *B* et *C*, le sommet *A* décrira la circonférence d'un cercle qui passera par les deux points *B* et *C*.

Ceci peut servir, 1°. *à décrire un cercle qui passe par trois points donnés* B, A, C (*fig.* 41) *lorsqu'on ne peut approcher du centre.* Il faudra joindre le point *A* aux deux points *B* et *C* par deux règles *AM*, *AN*: Fixer ces deux règles de manière qu'elles ne puissent s'écarter l'une de l'autre;

alors en faisant mouvoir l'angle *BAC* de manière que les règles *AM*, *AN* touchent toujours les points *B* et *C*, le sommet *A* décrira la circonférence demandée.

2°. *A décrire un arc de cercle d'un nombre de degrés proposé, et qui passe par deux points donnés* B *et* C ; ce qui peut être nécessaire dans la pratique.

Pour cet effet, on retranchera de 360 degrés, le nombre des degrés que cet arc doit avoir, et ayant pris la moitié du reste, on ouvrira les deux règles, de manière qu'elles fassent un angle égal à cette moitié. Fixant alors les deux règles l'une à l'autre, et les faisant tourner autour de deux pointes fixées en *B* et *C*, l'arc *BAC* que le sommet décrira dans ce mouvement, sera du nombre de degrés proposé.

Il est facile de voir pourquoi on fait l'angle *BAC* égal à la moitié du reste; c'est qu'il a pour mesure la moitié de *BC* qui est la différence entre la circonférence entière et l'arc *BAC*.

Des lignes droites qui renferment un espace.

73. Le moindre nombre des lignes droites qu'on puisse employer pour renfermer un espace, est trois ; et alors cet espace se nomme *triangle rectiligne* ou simplement *triangle*. *ABC* (*fig.* 42), est un triangle, parce que c'est un espace renfermé par trois lignes droites, ou plus exactement, parce que c'est une figure qui n'a que trois angles.

Il est évident que dans tout triangle, la somme

Digitized by Google

de deux côtés, pris comme on le voudra, est toujours plus grande que le troisième. *AB* plus *BC*, par exemple, valent plus que *AC*; parce que *AC* étant la ligne droite qui va de *A* à *C*, est le plus court chemin pour aller d'un de ces points à l'autre.

Un triangle, dont les trois côtés sont égaux, se nomme triangle *équilatéral*, (*fig.* 44).

Celui dont deux côtés seulement sont égaux, se nomme triangle *isoscèle*, (*fig.* 45).

Et celui, dont les trois côtés sont inégaux, se nomme triangle *scalène*, (*fig.* 43).

74. *La somme des trois angles de tout triangle rectiligne, vaut deux angles droits ou* 180^d.

Prolongez indéfiniment le côté *AC* vers *E* (*fig.* 43), et concevez la ligne *CD* parallèle au côté *AB*.

L'angle *BAC* est égal à l'angle *DCE* (37), puisque les lignes *AB* et *CD* sont parallèles. L'angle *ABC* est égal à l'angle *BCD* par la seconde propriété des parallèles (38); donc les deux angles *BAC* et *ABC*, valent ensemble autant que les deux angles *BCD* et *DCE*, c'est-à-dire, autant que l'angle *BC* ; mais *BCE* est supplément (17 et 19) de *BCA*; donc les deux angles *BAC* et *ABC* forment ensemble

le supplément de *BCA;* donc ces trois angles valent ensemble 180^d.

75. La démonstration que nous venons de donner, prouve donc en même temps que *l'angle extérieur* BCE *d'un triangle* ABC, *vaut la somme des deux intérieurs* BAC, ABC *qui lui sont opposés.*

Concluons de ce qu'on vient de dire (74), 1°. *qu'un triangle rectiligne ne peut avoir qu'un seul angle qui soit droit :* et alors on l'appelle *triangle rectangle ;* (*fig.* 46).

2°. Qu'à plus forte raison *il ne peut avoir qu'un seul angle qui soit obtus ;* dans ce cas on l'appelle *triangle obtusangle*, (*fig.* 47).

3°. Mais *il peut avoir tous ses angles aigus ;* et alors il est dit *triangle acutangle*, (*fig.* 45).

4°. Que *connoissant deux angles ou seulement la somme de deux angles d'un triangle, on connoît le troisième angle*, en retranchant de 180^d, la somme des deux angles connus.

5°. Que *lorsque deux angles d'un triangle sont égaux à deux angles d'un autre triangle, le troisième angle de chacun est nécessairement égal ;* puisque les trois angles de chaque triangle valent 180^d.

6°. Que *les deux angles aigus d'un triangle rectangle sont toujours complément* (21) *l'un de l'autre.* Car dès que l'un des angles du triangle est de

Digitized by Google

90^{d}, il ne reste plus que 90^{d} pour les deux autres ensemble.

76. Nous avons vu ci-dessus (55) qu'on pouvoit toujours faire passer une circonférence de cercle, par trois points qui ne sont pas en ligne droite; concluons-en que . . . . .

On peut toujours faire passer une circonférence de cercle, par les sommets des trois angles d'un triangle. On appelle cela *circonscrire un cercle à un triangle.*

77. De-là il est aisé de conclure, 1°. que *si deux angles d'un triangle sont égaux, les côtés qui leur sont opposés seront aussi égaux;* et réciproquement *si deux côtés d'un triangle sont égaux, les angles opposés à ces côtés seront égaux.*

Car en faisant passer une circonférence par les trois angles *A*, *B*, *C* (*fig.* 48), si les angles *ABC*, *ACB*, sont égaux, les arcs *ADC*, *AEB* dont les moitiés leur servent de mesure (63), seront nécessairement égaux; donc (7) les cordes *AC*, *AB* seront égales. Et réciproquement, si les côtés *AC*, *AB* sont égaux, les arcs *ADC*, *AEB* seront égaux; donc les angles *ABC*, *ACB* qui ont pour mesure la moitié de ces arcs, seront égaux.

Donc les trois angles d'un triangle équilatéral sont égaux, et valent, par conséquent, chacun le tiers de 180^{d} ou 60^{d}.

78. 2°. *Dans un même triangle* ABC (fig. 49), *le plus grand côté est opposé au plus grand angle, le plus petit côté au plus petit angle, et réciproquement.*

Car si l'angle *ABC* est plus grand que l'angle *ACB*, l'arc *AC* sera plus grand que l'arc *AB*, et par conséquent la corde *AC* plus grande que la corde *AB*. Le réciproque se démontre de même.

De l'égalité des Triangles.

79. Il y a plusieurs propositions dont la démonstration est fondée sur l'égalité de certains triangles qu'on y considère; il est donc à propos d'établir ici les caractères auxquels on peut reconnoître cette égalité. Ils sont au nombre de trois.

80. *Deux triangles sont parfaitement égaux quand ils ont un angle égal compris entre deux côtés égaux chacun à chacun.*

Que l'angle *B* du triangle *BAC* (*fig.* 50), soit égal à l'angle *E* du triangle *EDF*; que le côté *AB* soit égal au côté *DE*, et le côté *BC* égal au côté *EF*; voici comment on peut se convaincre que ces deux triangles sont égaux.

Concevez la figure *ABC* appliquée sur la figure *DEF*, de manière que le côté *AB* soit exactement

appliqué sur son égal *DE;* puisque l'angle *B* est égal à l'angle *E*, le côté *BC* tombera sur *EF*; et le point *C* tombera sur le point *F*, puisque *BC* est supposé égal à *EF*. Le point *A* étant sur *D*, et le point *C* sur *F*, il est donc évident que *AC* s'applique exactement sur *DF*, et que par conséquent les deux triangles conviennent parfaitement.

Donc pour construire un triangle dont on connoîtroit deux côtés et l'angle compris, on tirera (*fig.* 50), une ligne *DE* égale à l'un des côtés connus : sur cette ligne on fera (14) un angle *DEF* égal à l'angle connu, et ayant fait *EF* égal au second côté connu, on tirera *DF*, ce qui achèvera le triangle demandé.

81. *Deux triangles sont parfaitement égaux, quand ils ont un côté égal adjacent à deux angles égaux chacun à chacun.*

Que le côté *AB* (*fig.* 50) soit égal au côté *DE*, l'angle *B* égal à l'angle *E*, et l'angle *A* égal à l'angle *D*.

Concevez le côté *AB* appliqué exactement sur le côté *DE; BC* se couchera sur *EF*, puisque l'angle *B* est égal à l'angle *E;* pareillement, puisque l'angle *A* est égal à l'angle *D*, le côté *AC* se couchera sur *DF;* donc *AC* et *BC* se rencontreront au point *F;* donc les deux triangles sont égaux.

Digitized by Google

Donc pour construire un triangle, dont on connoîtroit un côté et les deux angles adjacens, on tirera, (*fig.* 50), une ligne *DE* égale au côté connu; aux extrémités de cette ligne, on fera (14) les angles *E* et *D* égaux aux deux angles connus; alors les côtés *EF*, *DF* de ces angles termineront, par leur rencontre, le triangle demandé.

82. La proposition (81) peut servir à démontrer que *les parties* AC, BC (*fig.* 51) *de deux parallèles, interceptées entre deux autres parallèles* AB, CD, *sont égales.*

Abaissez les deux perpendiculaires *AE*, *BF*; les angles *AEC*, *BFD* sont égaux, puisqu'ils sont droits; et à cause des parallèles *AC* et *BD*, *AE* et *BF*, l'angle *EAC* est égal à l'angle *FBD* (43). D'ailleurs *AE* est égal à *BF* (36); donc les deux triangles *AEC*, *BFD* sont égaux, puisqu'ils ont un côté égal adjacent à deux angles égaux chacun à chacun; donc *AC* est égal à *BD*.

On demontrera de même, que si *AC* est égal et parallèle à *BD*, *AB* sera égal et parallèle à *CD*; car outre le côté *AC* égal à *BD*, et l'angle droit en *E* ainsi qu'en *F*, l'angle *ACE* sera égal à *BDF*, puisque *AC* est parallèle à *BD* (38); donc (75) le troisième angle *EAC* sera égal au troisième angle *DBF*; donc les deux triangles auront un côté égal adjacent à deux angles égaux chacun à chacun; donc ils seront

égaux ; donc AE est égal à BF, et par conséquent les deux lignes sont parallèles ; or de-là et de ce qu'on vient de démontrer (82), il s'ensuit que AB est égal à CD.

83. *Deux triangles sont parfaitement égaux lorsqu'ils ont les trois côtés égaux à chacun.*

Que le côté AB (*fig.* 50) soit égal au côté DE, le côté BC, égal au côté EF ; et le côté AC, égal au côté DF.

Concevez le côté AB exactement appliqué sur DE, et le plan BAC couché sur le plan de la figure EDF ; je dis que le point C tombe sur le point F.

Décrivez des points D et E comme centres, et des rayons DF et EF, les deux arcs IK et HG qui se coupent en F ; il est évident que le point C doit tomber sur quelque point de IK, puisque AC est égal a DF ; par une semblable raison, le point C doit tomber sur quelque point de GH, puisque BC est égal à EF ; il doit donc tomber sur le point F qui est le seul point commun que ces deux arcs puissent avoir d'un même côté de DE ; donc les deux triangles conviennent parfaitement, et sont par conséquent égaux.

Donc pour construire un triangle dont on connoîtroit les trois côtés, il faut (*fig.* 50) tirer une droite DE égale

à l'un des côtés connus : du point *D* comme centre, et d'un rayon égal au second côté connu, décrire l'arc *IK*; pareillement du point *E*, comme centre, et d'un rayon égal au troisième côté connu, décrire l'arc *GH*; enfin du point d'intersection *F*, tirer aux points *D* et *E*, les droites *FD* et *FE*.

Des Polygones.

84. Une figure de plusieurs côtés, s'appelle en général un *Polygone*.

Lorsqu'elle a trois côtés, on l'appelle

		.... *Triangle* ou *Trilatère.*
Lorsqu'elle en a	4	.... *Quadrilatère.*
	5	.... *Pentagone.*
	6	.... *Hexagone.*
	7	.... *Heptagone.*
	8	.... *Octogone.*
	9	.... *Ennéagone.*
	10	.... *Décagone.*
	11	.... *Endécagone.*
	12	.... *Dodécagone.*

Nous n'étendons pas davantage la liste de ces noms, parce qu'une figure est aussi bien désignée en énonçant le nombre de ses côtés, qu'en employant ces différens noms, dont le grand nombre chargeroit assez inutilement la mémoire; nous n'exposons ceux-ci que parce qu'ils se rencontrent plus fréquemment que les autres.

On appelle angle *saillant*, celui dont le sommet

est hors de la figure ; la *figure* 52 a tous ses angles saillans.

L'angle *rentrant* est, au contraire, celui dont le sommet entre dans la figure ; l'angle *CDE* (*fig.* 53) est un angle rentrant.

Les propriétés des polygones ont une application assez fréquente dans la fortification. Les termes *d'angle saillant*, *angle rentrant*, y sont particulièrement appliqués aux angles du chemin couvert et des lignes de retranchement.

On appelle *diagonale*, une ligne tirée d'un angle à un autre, dans une figure quelconque. *AD*, *AC* (*fig.* 52) sont des diagonales.

85. *Tout polygone peut être partagé par des diagonales menées d'un de ses angles, en autant de triangles moins deux, qu'il a de côtés.*

L'inspection des *figures* 52 et 53, suffit pour faire sentir que cela est vrai généralement.

86. Donc *pour avoir la somme de tous les angles intérieurs d'un polygone quelconque, il faut prendre* 180^d, *autant de fois moins deux, qu'il y a de côtés.*

Car il est évident que la somme des angles intérieurs des polygones *ABCDE* (*fig.* 52), et *ABCDEF* (*fig,* 53), est la même que celle des angles des triangles *ABC*, *ACD*, ect. Or la somme des trois angles de chacun de ces triangles

Digitized by Google

est de 180 degrés; il faut donc prendre 180 degrés autant de fois qu'il y a de triangles, c'est-à-dire, (85) autant de fois moins deux, qu'il y a de côtés.

Dans la *figure* 53 l'angle *CDE*, pour être compris dans la proposition précédente, doit être compté, non pas pour la partie *CDE* extérieure au polygone, mais pour la partie *CDE* composée des angles *ADE*, *ADC*; c'est un angle de plus de 180 degrés, et qu'on ne doit pas moins considérer comme angle, que tout autre angle au-dessous de 180 degrés. Car un angle n'est en général (10) que la quantité dont une ligne a tourné autour d'un point fixe.

87. *Si l'on prolonge, dans le même sens, tous les côtés d'un polygone qui n'a point d'angles rentrans, la somme de tous les angles extérieurs vaudra* 360 *degrés, quelque nombre de côtés qu'ait le polygone.* Voyez (*fig.* 52).

Car chaque angle extérieur est le supplément de l'angle intérieur qui lui est contigu; ainsi les angles, tant intérieurs qu'extérieurs, valent autant de fois 180 degrés qu'il y a de côtés; mais (86) les intérieurs ne diffèrent de cette somme, que de deux fois 180 degrés ou 360 degrés; il reste donc 360 degrés pour les angles extérieurs.

88. On appelle polygone *régulier*, celui qui a tous ses angles égaux, et tous ses côtés égaux. Voyez (*fig.* 54).

Digitized by Google

Il est donc toujours facile de savoir combien vaut chaque angle intérieur d'un polygone régulier; car ayant trouvé par la proposition enseignée (86), combien valent ensemble tous les angles intérieurs, il n'y aura qu'à diviser cette valeur totale, par le nombre des côtés; par exemple, si l'on demande combien vaut chaque angle interieur d'un pentagone régulier; comme il y a cinq côtés, je prends 180 degrés, 5 fois moins deux, c'est-à-dire, 3 fois; ce qui me donne 540 degrés pour la valeur des 5 angles intérieurs; donc, puisqu'ils sont tous égaux, chacun doit valoir la cinquième partie de 540 degrés, c'est-à-dire, 108 degrés.

89. De la définition du polygone régulier, il suit, qu'*on peut toujours faire passer une même circonférence de cercle, par tous les angles d'un polygone régulier.*

Car il est prouvé (55) qu'on peut faire passer une circonférence de cercle par les trois points *A*, *B*, *C* (*fig.* 54); or je dis qu'elle passe aussi par l'extrémité du côté *CD*; en effet, il est facile de prouver que le point *D* où cette circonférence doit rencontrer le côté *CD*, est éloigné de *C* d'une quantité égale à *BC*; car l'angle *ABC* étant égal à *BCD*, les arcs *AEC*, *BFD*, dont les moitiés servent de mesure à ces angles (63), doivent être égaux; retranchant de chacun l'arc commun *AFED*, les arcs restans *CD* et *AB*, doivent être égaux; donc aussi (7) les cordes *CD* et *AB* sont égales; donc le point *D* où le côté

Digitized by Google

CD est rencontré par la circonférence qui passe par *A*, *B*, *C*, est le même que le sommet de l'angle du polygone. On démontrera la même chose des angles *E* et *F*.

90. On voit donc que pour circonscrire un cercle à un polygone régulier, la question se réduit à faire passer un cercle par les sommets de trois de ses angles, ce qui se fait de la manière enseignée (55).

91. *Toutes les perpendiculaires abaissées du centre d'un polygone régulier, sur les côtés, sont égales.* Car ces perpendiculaires *OH*, *OL* devant tomber sur le milieu de chaque côté (52), les lignes *AH* et *AL* seront égales; or *AO* est commun aux deux triangles *OHA* et *OLA*; d'ailleurs, à cause des triangles *ABO*, *AOF* qui ont tous leurs côtés égaux chacun à chacun, les angles *OAH*, *OAL* sont égaux; donc les deux triangles *OAH*, *OAL* qui ont un angle égal compris entre deux côtés égaux chacun à chacun, sont égaux (80). Donc *OH* est égal à *OL*.

Donc, si d'un rayon égal à l'une de ces perpendiculaires, on décrit une circonférence, elle touchera tous les côtés. Cette circonférence est dite *inscrite* au polygone.

Les perpendiculaires *OH*, *OL* s'appellent, chacune, *l'apothême* du polygone.

92. Il est clair que si du centre du polygone régulier on tire des lignes à tous les angles, ces lignes comprendront entr'elles des angles égaux, puisque ces angles auront pour mesure des arcs qui sont soutendus par des cordes égales; donc *pour avoir l'angle au centre d'un polygone régulier, il faut diviser* 360 *degrés par le nombre des côtés.* Car ces angles égaux ont tous ensemble pour mesure la circonférence entière. Par exemple, pour l'hexagone, chaque angle au centre sera la sixième partie de 360 degrés; c'est-à-dire, sera de 60 degrés.

93. Donc *le côté de l'hexagone est égal au rayon du cercle circonscrit.* Car en tirant les rayons *AO* et *BO*, le triangle *AOB* sera isoscèle, et par conséquent (77.) les deux angles *BAO* et *ABO* seront égaux; or comme l'angle *AOB* est de 60 degrés, les deux autres doivent valoir ensemble 120 degrés (75); donc chacun d'eux est de 60 degrés; les trois angles sont donc égaux, et par conséquent le triangle est équilatéral (77); donc *AB* est égal au rayon *AO*.

94 Cette dernière proposition peut servir pour la division de la circonférence, de 15 en 15 degrés.

On tirera deux diamètres *AB*, *DE* (*fig.* 55) perpendiculaires l'un à l'autre, et ayant pris une ouverture de compas égale au rayon *CE*, on la portera successivement de *E* en F, et de *A* en *G*; le quart de circonférence *AE*

Digitized by Google

sera, par ce moyen, divisé en trois parties égales *AF*, *FG*, *GE;* car puisqu'on a pris le rayon pour l'ouverture du compas, il suit de ce qui vient d'être dit (93), que l'arc *EF* est de 60 degrés; or *EA* est de 90 degrés, donc *AF* est de 30 degrés. Par la même raison *AG* est de 60 degrés; et comme *AE* est de 90 degrés, *GE* est donc de 30 degrés; enfin, si de l'arc total *AE* de 90 degrés, vous retranchez les arcs *AF* et *GE*, qui valent ensemble 60 degrés, l'arc restant *FG* sera de 30 degrés. Ayant ainsi divisé le quart de circonférence en arcs de 30 degrés, il sera facile d'avoir l'arc de 15 degrés, en divisant en deux parties égales, chacun des arcs *AF*, *FG* et *GE* par la méthode donnée (54). On fera les mêmes opérations sur chacun des trois autres quarts *AD*, *DB* et *BE*.

Si l'on vouloit conduire cette division jusqu'à l'arc de 1 degré, il faudroit y aller par tâtonnement; car il n'y a pas de méthode géométrique pour cela. Il y a cependant une méthode géométrique pour venir directement jusqu'à l'arc de trois degrés; mais comme les propositions qui y conduisent ne peuvent nous être d'aucune autre utilité, nous n'en parlerons point.

Remarquons seulement que ce que nous entendons ici par opérations géométriques, ce sont celles dans lesquelles la chose dont il s'agit, peut être exécutée par un nombre *déterminé* d'opérations faites avec la règle et le compas seuls.

Des Lignes proportionnelles.

95. Avant que d'entrer en matière sur ce qui regarde les lignes proportionnelles, nous placerons ici quelques propositions sur les proportions, qui

sont

sont une suite immédiate de ce que nous avons enseigné dans l'Arithmétique. Mais pour abréger le discours, nous conviendrons, pour l'avenir, que lorsque deux quantités devront être ajoutées l'une à l'autre, nous indiquerons cette opération par ce signe +, qui équivaudra au mot *plus*; ainsi 4 + 3 signifiera 4 plus 3, ou 4 ajouté à 3, ou 3 ajouté à 4. Pareillement pour marquer la soustraction, nous nous servirons de ce signe —, qui équivaudra au mot *moins*; ainsi 5 — 2 signifiera 5 moins 2, ou qu'on doit retrancher 2 de 5. Comme il n'est pas toujours question de faire réellement les opérations, mais de raisonner sur des circonstances de ces opérations, il est souvent plus utile de les représenter, que d'en donner le résultat.

Pour marquer la multiplication, nous nous servirons de ce signe ×, qui équivaudra à ces mots *multiplié par;* ainsi 5 × 4, signifiera 5 multiplié par 4.

Et pour marquer la division, nous ferons comme en Arithmétique : nous écrirons le dividende et le diviseur, en forme de fraction dont le dividende sera numérateur, et le diviseur, dénominateur; ainsi $\frac{12}{7}$ marquera 12 divisé par 7.

Cela posé, nous avons vu (*Arith.* 175) que dans toute proportion, la somme des antécédens, est à la somme des conséquens, comme un anté-

cédent est à son conséquent ; et qu'il en est de même de la différence des antécédens comparée à celle des conséquens.

96. Nous pouvons donc conclure de-là, que *dans toute proportion la somme des antécédens est à la somme des conséquens, comme la différence des antécédens est à la différence des conséquens ;* car puisque dans la proportion 48 : 16 :: 12 : 4, par exemple, on a (*Arith.* 175),

48 + 12 : 16 + 4 :: 12 : 4,

et 48 — 12 : 16 — 4 :: 12 : 4.

il est évident (à cause du rapport commun de 12 : 4) qu'on peut conclure 48 + 12 : 16 + 4 :: 48 — 12 : 16 — 4. Le raisonnement est le même pour toute autre proportion.

97. On peut donc, en mettant, dans cette dernière proportion, le troisième terme à la place du second, et le second à la place du troisième, ce qui est permis (*Arith.* 171), dire aussi, que *la somme des antécédens, est à leur différence, comme la somme des conséquens est à leur différence.*

98. Si dans la proportion 48 : 16 :: 12 : 4, on échange les places des deux moyens, ce qui donnera 48 : 12 :: 16 : 4, et qu'on applique à celle-ci la proposition qu'on vient de démontrer (96) ; on aura 48 + 16 : 12 + 4 :: 48

— 16 : 12 — 4 qui à l'égard de la proportion 48 : 16 :: 12 : 4 , fournit cette proposition : *La somme des deux premiers termes d'une proportion, est à la somme des deux derniers termes, comme la différence des deux premiers, est à la différence des deux derniers ;* ou (en mettant le troisième terme à la place du second , et le second à la place du troisième) *la somme des deux premiers termes est à leur différence, comme la somme des deux derniers, est à leur différence.*

99. *Si un rapport est composé du produit de plusieurs autres rapports, on peut, à chacun des rapports composans, substituer un rapport exprimé par d'autres termes, pourvu que ces deux termes aient le même rapport que ceux auxquels on les substituera.*

Par exemple, dans le rapport de $6 \times 10 : 2 \times 5$, on peut, au lieu des facteurs 6 et 2 substituer 3 et 1, ce qui donnera le rapport composé $3 \times 10 : 1 \times 5$ qui est le même que le rapport $6 \times 10 : 2 \times 5$. En effet, puisque 6 : 2 :: 3 : 1, on peut, sans changer cette proportion (*Arith.* 173), multiplier les antécédens par 10 et les conséquens par 5, et alors on aura $6 \times 10 : 2 \times 5 :: 3 \times 10 : 1 \times 5$.

Il est facile de voir que ce raisonnement s'applique à tout autre rapport.

100. Si deux, ou un plus grand nombre de

proportions sont telles que dans le premier rapport de l'une, l'antécédent se trouve égal au conséquent de l'autre, on pourra, lorsqu'il s'agira de multiplier ces proportions par ordre, omettre les termes qui se trouveront communs d'antécédent à conséquent ; par exemple, si on a les deux proportions

$$\begin{array}{r} 6 : 4 :: 12 : 8 \\ 4 : 3 :: 20 : 15 \\ \hline \end{array}$$

on pourra conclure $6 : 3 :: 12 \times 20 : 8 \times 15$.

Car quand on admettroit le multiplicateur commun 4, le rapport de 6×4 à 4×3 qu'on auroit alors, ne différeroit pas du rapport de 6 à 3 (*Arith.* 160) que l'on a en omettant ce facteur.

De même si on a
$$\begin{array}{r} 6 : 4 :: 12 : 8 \\ 4 : 3 :: 20 : 15 \\ 3 : 7 :: 21 : 49 \\ \hline \end{array}$$

on en conclura $6 : 7 :: 12 \times 20 \times 21 : 8 \times 15 \times 49$.

La même chose aura lieu pour les seconds rapports, et par la même raison.

Cette observation est utile pour trouver le rapport de deux quantités, lorsque ce rapport doit être composé ; parce qu'alors on compare chacune de ces quantités à d'autres quantités qu'on emploie comme auxiliaires, et qui ne doivent plus rester après la démonstration.

Digitized by Google

Nous allons, maintenant, transporter aux lignes les connoissances que nous avons tirées des nombres, sur les proportions. Mais pour rendre nos démonstrations plus courtes et plus générales, nous ne donnerons aucune valeur particulière à ces lignes, sinon dans quelques applications ; au reste on peut toujours s'aider par des comparaisons avec des nombres.

Les rapports que nous considérerons ici sont les rapports géométriques. Ainsi quand nous dirons, une telle ligne est à une telle ligne, comme 5 est à 4, par exemple, on doit entendre que la première contient la seconde, autant que 5 contient 4.

101. *Si sur un des côtés* AZ *d'un angle quelconque* ZAX (fig. 56), *on marque les parties égales* AB, BC, CD, DE, etc. *de telle grandeur et en tel nombre qu'on voudra ; et si après avoir tiré à volonté, par l'un* F *des points de division, la ligne* FL *qui rencontre le côté* AX *en* L, *on mène par les autres points de division, les lignes* BG, CH, DI, EK, etc. *parallèles à* FL ; *je dis que les parties* AG, GH, HI, etc. *du côté* AX, *seront aussi égales entr'elles.*

Menons par les points *G*, *H*, *I*, *ect.* les lignes *GM*, *HN*, *IO*, *etc.* parallèles à *AZ*; les triangles *ABG*, *GMH*, *HNI*, *IOK*, *&c.* seront tous égaux

entr'eux ; car 1°. les lignes *GM*, *HN*, *IO*, *etc.* sont, chacune, égales à *AB*, puisque (82) elles sont égales à *BC*, *CD*, *DE*, *etc.* 2°. les angles *GMH*, *HNI*, *IOK*, *etc.* sont tous égaux entr'eux, puisqu'ils sont tous égaux à l'angle *ABG* (43) ; 3°. les angles *MGH*, *NHI*, *OIK*, *etc.* sont tous égaux entr'eux, puisqu'ils sont tous égaux à l'angle *BAG* (43).

Tous les triangles *BAG*, *MGH*, *NHI*, *etc.* ont donc un côté égal adjacent à deux angles égaux chacun à chacun ; ils sont donc tous égaux ; donc les côtés *AG*, *GH*, *HI*, *etc.* de ces triangles, sont tous égaux entr'eux ; donc la ligne *AX* est, en effet, divisée en parties égales, par les parallèles.

Il est donc évident que si *AB* est telle partie que ce soit de *AG*, *BC* sera une semblable partie de *GH* ; *CD* sera une semblable partie de *HI* ; si, par exemple, *AB* est les $\frac{2}{3}$ de *AG*, *BC* sera $\frac{2}{3}$ de *GH*, et ainsi de suite.

Il en sera de même de 2, 3, 4, etc. parties de *AF* comparées à 2, 3, 4, etc. parties de *AL* ; donc une portion quelconque *AD* ou *DF* de la ligne *AF*, est même partie de la portion correspondante *AI* ou *IL* de la ligne *AL*, que *AB* l'est de *AG* ; c'es-à-dire, que....

$$AD : AI :: AB : AG,$$
$$\text{et } DF : IL :: AB : AG.$$

On peut dire de même, que $AF : AL :: AB : AG$.

Donc (à cause du rapport de $AB : AG$ commun à ces trois proportions) on peut dire que.

$$AD : AI :: DF : IL,$$
$$\text{et } AD : AI :: AF : AL.$$

102. *Donc si par un point* D (fig. 57) *pris à volonté sur un des côtés* AF *d'un triangle* AFL, *on mène une ligne* DI *parallèle au côté* FL, *les deux côtés* AF, AL *seront coupés proportionnellement*, c'est-à-dire, qu'on aura toujours

$$AD : AI :: DF : IL,$$
$$\text{et } AD : AI :: AF : AL;$$

ou bien, en échangeant les places des deux moyens (*Arith.* 171),

$$AD : DF :: AI : IL,$$
$$\text{et } AD : AF :: AI : AL,$$

quelque soit d'ailleurs, l'angle FAL.

Car on peut toujours concevoir AF divisée en un assez grand nombre de parties pour que D soit un des points de division. Si donc par tous ces points de division on conçoit des parallèles à FL; DI étant l'une de ces parallèles, on démontrera précisément, comme on vient de le faire (101), que chacune de ces proportions a lieu.

103. Donc 1°. *Si d'un point* A *pris à volonté*

hors de la ligne GL (fig. 60 et 61), *on tire à différens points de cette ligne, plusieurs lignes* AG, AH, AI, AK, AL; *toute parallèle* BF *à la ligne* GL, *coupera toutes ces lignes, en parties proportionnelles*, c'es-à-dire, qu'on aura....

AB : *BG* :: *AC* : *CH* :: *AD* : *DI* :: *AE* : *EK* :: *AF* : *FL*,
et *AB* : *AG* :: *AC* : *AH* :: *AD* : *AI* :: *AE* : *AK* :: *AF* : *AL*.

Car en considérant successivement les angles *GAH*, *GAI*, *GAK*, *GAL*, comme on a fait l'angle *FAL* dans la *figure* 57, on démontrera de la même manière, que tous ces rapports sont égaux.

104. 2°. *La ligne* AD (fig. 58) *qui divise en deux parties égales un angle* BAC *d'un triangle, coupe le côté opposé* BC, *en deux parties* BD, DC *proportionnelles aux côtés correspondans* AB, AC; *c'est-à-dire, de manière qu'on a* BD : DC :: AB : AC.

Car si par le point *B* on mène *BE* parallèle à *AD*, et qui rencontre *CA* prolongé en *E*, les lignes *CE*, *CB* étant alors coupées proportionnellement (102), on aura *BD* : *CD* :: *AE* : *AC*.

Or il est facile de voir que *AE* est égal à *AB*; car à cause des parallèles *AD* et *BE*, l'angle *E* est égal à l'angle *DAC* (37), et l'angle *EBA* est égal à son alterne *BAD* (38); donc puisque

DAC et *BAD* sont égaux comme étant les moitiés de *BAC*, les angles *E* et *EBA* seront égaux ; donc les côtés *AE* et *AB* sont aussi égaux ; donc la proportion *BD* : *CD* :: *AE* : *AC*, se change en celle-ci *BD* : *CD* :: *AB* : *AC*.

On peut faire usage de cette proposition pour déterminer les points du prolongement de la capitale d'un bastion.

On prendra sur les prolongemens *BD*, *BE* (*fig.* 59) des deux faces, deux points *D* et *E*; et ayant mesuré *BD* et *BE*, ou (lorsqu'on ne peut les mesurer) en ayant déterminé les longueurs, par les moyens qui seront enseignés par la suite, on mesurera aussi *DE*; alors comme la capitale divise l'angle *ABC* et son opposé *DBE* en deux parties égales, on aura *DB* : *BE* :: *DF* : *EF*, ce qui (*Arith.* 174) donne *DB* + *BE* : *BE* :: *DE* : *EF*. On aura donc *EF*, et par conséquent le point *F*.

105. *Si on coupe les lignes* AF *et* AL (fig. 57), *proportionnellement aux points* D *et* I, *c'est-à-dire*, *de manière que* AF : AD :: AL : AI, *la ligne* DI *sera parallèle à* FL.

Car la partie de *AL* que couperoit la parallèle menée du point *D*, doit (102) être contenue dans *AL*, autant que *AD* l'est dans *AF*; or, par la supposition, *AI* est contenue dans *AL* précisément ce même nombre de fois ; donc cette partie ne peut être autre que *AI*.

106. Donc *si on coupe proportionnellement*, *aux points* B, C, D, E, F (fig. 60), *les lignes* AG,

A H, A I, A K, A L, *menées du point* A *à différens points de la ligne* G L, *la ligne* BCDEF *qui passera par tous ces points, sera une ligne droite parallèle à* G L.

107. Les propositions enseignées, (101 *et suiv.*) sont également vraies, lorsque la ligne *BF*, au lieu d'être entre le point *A* et la ligne *GL*, comme dans la *figure* 60, tombe au-delà du point *A* comme dans la *figure* 61. Car tout ce qui a été dit de la *figure* 56, et qui sert de base aux propositions établies (101 *et suiv.*), auroit également lieu pour les parallèles qui couperoient *ZA* et *XA* prolongées dans la *figure* 56.

De la similitude des Triangles.

108. On appelle côtés *homologues* de deux triangles, ou en général, de deux figures semblables, ceux qui ont des positions semblables, chacun dans la figure à laquelle il appartient.

Lorsqu'on dit que deux triangles ou deux figures semblables ont les côtés proportionnels, on entend que chaque côté de la première figure, contient le côté homologue de la seconde, toujours le même nombre de fois; en sorte que dans les proportions qu'on en déduit, lorsqu'on a comparé un côté de la première au côté homologue de la seconde, il faut former le second rapport, en comparant de même un autre côté de la première, au côté homologue de la seconde; ou bien si on a d'abord comparé l'un à

Digitized by Google

l'autre, deux côtés de la première figure, les deux côtés que l'on doit comparer pour former le second rapport, doivent être homologues à ceux-là, et pris dans le même ordre, c'est-à-dire, que l'antécédent du second rapport doit être côté homologue de l'antécédent du premier.

109. *Deux triangles qui ont les angles égaux chacun à chacun, ont les côtés homologues proportionnels, et sont, par conséquent, semblables.*

Si les deux triangles ADI, AFL (*fig.* 62), sont tels que l'angle A du premier soit égal à l'angle A du second, l'angle D égal à l'angle F, et l'angle I égal à l'angle L, je dis qu'on aura $AD : AF :: AI : AL :: DI : FL$.

Car puisque l'angle A du premier est égal à l'angle A du second, on peut appliquer ces deux triangles l'un sur l'autre de la manière représentée dans la *figure* 57; alors puisque l'angle D est égal à l'angle F, les lignes DI et FL seront parallèles (37); donc, selon ce qui a été dit (102), on aura $AD : AF :: AI : AL$.

Tirons maintenant par le point I, la droite IH parallèle à AF; selon ce qui a été dit (102), on voit que $AI : AL :: FH : FL$, ou, à cause que FH est égal à DI (82) $:: DI : FL$; donc $AD : AF :: AI : AL :: DI : FL$.

Comme on peut changer les places des moyens, on peut dire aussi $AD : AI :: AF : AL$, et $AI : DI :: AL : FL$.

110. Puisque (75) lorsque deux angles d'un triangle sont égaux à deux angles d'un autre triangle, le troisième angle est nécessairement égal au troisième angle; concluons-en que *deux triangles sont semblables lorsqu'ils ont deux angles égaux chacun à chacun.*

111. On a vu (43) que deux angles qui ont les côtés parallèles, et qui sont tournés d'un même côté, sont égaux; donc *deux triangles qui ont les côtés parallèles, ont les angles égaux chacun à chacun, et ont, par conséquent* (109), *les côtés proportionnels.*

Donc aussi *deux triangles qui ont les côtés perpendiculaires chacun à chacun, ont aussi ces mêmes côtés proportionnels;* car si on fait faire un quart de révolution, à l'un de ces triangles, ses côtés deviendront parallèles à ceux du second.

112. *Si de l'angle droit* A *d'un triangle rectangle* BAC (fig. 46), *on abaisse une perpendiculaire* AD *sur le côté opposé* BC (*qu'on appelle* hypothénuse); 1°. *les deux triangles* ADB, ADC *seront semblables entr'eux et au triangle* BAC. 2°. *La perpendiculaire* AD *sera moyenne proportionnelle entre les deux parties* BD *et* DC *de l'hypothénuse.* 3°. *Chaque côté* AB *ou* AC *de l'angle droit, sera moyen proportionnel entre l'hypothénuse et le segment correspondant* BD *ou* DC.

Digitized by Google

Car les deux triangles *ADB*, *ADC*, ont chacun un angle droit en *D*, comme le triangle *BAC* en a un en *A*; d'ailleurs ils ont de plus chacun un angle commun avec ce même triangle *BAC*; puisque l'angle *B* appartient tout-à-la-fois au triangle *ADB* et au triangle *BAC*; pareillement l'angle *C* appartient tout-à-la-fois au triangle *ADC* et au triangle *BAC*; donc (109) ces trois triangles sont semblables. Donc, comparant les côtés homologues des deux triangles *ADB* et *ADC*, on aura

$$BD : AD :: AD : DC;$$

comparant les côtés homologues des deux triangles *ADB*, *BAC*, on aura

$$BD : AB :: AB : BC;$$

enfin comparant les côtés homologues des triangles *ADC* et *BAC*, on aura

$$CD : AC :: AC : BC,$$

où l'on voit que *AD* est (*Arith.* 164) moyenne proportionnelle entre *BD* et *DC*; *AB* moyenne proportionnelle entre *BD* et *BC*; et enfin *AC* moyenne proportionnelle entre *CD* et *BC*.

113. *Deux triangles qui ont un angle égal compris entre deux côtés proportionnels, ont aussi les deux autres angles égaux, et sont, par conséquent, semblables.*

Si les deux triangles *ADI*, *AFL* (*fig.* 62) sont

tels que l'angle A du premier soit égal à l'angle A du second, et qu'en même temps les côtés qui comprennent ces angles, soient tels qu'on ait $AD : AF :: AI : AL$; je dis qu'ils seront semblables; c'est-à-dire, qu'ils auront les autres angles égaux chacun à chacun, et leurs troisièmes côtés DI et FL en même rapport que AD et AF, ou que AI et AL.

Car on peut appliquer l'angle A du triangle ADI sur l'angle A du triangle AFL, de la manière représentée par la *figure* 57. Or puisqu'on suppose que $AD : AF :: AI : AL$, les deux droites AF et AL sont donc coupées proportionnellement aux points D et I; donc DI est parallèle à FL (105); donc (37) l'angle AFL est égal à l'angle ADI, et l'angle ALF égal à l'angle AID.

De-là et de ce qui a été dit (109), il suit que $DI : FL :: AD : AF :: AI : AL$.

114. *Deux triangles qui ont leurs trois côtés homologues proportionnels, ont les angles égaux chacun à chacun, et sont, par conséquent, semblables.*

Si on suppose (*fig.* 63) que $DE : AB :: EF : BC :: DF : AC$; je dis que l'angle D est égal à l'angle A, l'angle E égal à l'angle B, et l'angle F égal à l'angle C.

Imaginons qu'on ait construit sur DE, un

Digitized by Google

triangle DGE, dont l'angle DEG soit égal à l'angle B, et l'angle GDE à l'angle A; le triangle DEG sera semblable au triangle ABC (109); donc (109) $DE : AB :: GE : BC :: DG : AC$; mais par la supposition, on a $DE : AB :: EF : BC :: DF : AC$; donc à cause du rapport commun de $DE : AB$, on aura $GE : BC :: EF : BC :: DG : AC :: DF : AC$, d'où l'on peut tirer ces deux proportions :

$$GE : BC :: EF : BC$$
et $$DG : AC :: DF : AC.$$

Donc puisque les deux conséquens sont égaux entr'eux dans chacune de ces deux proportions, les antécédens seront aussi égaux entr'eux; donc GE est égal à EF, et DG égal à DF. Le triangle DEG a donc ses trois côtés égaux à ceux du triangle DEF; il est donc (83) égal à ce triangle DEF; or on vient de voir que le triangle DEG est semblable à ABC, donc DEF est aussi semblable à ABC.

115. Nous avons prouvé ci-dessus (109) que quand la ligne DI (*fig.* 57) est parallèle au côté FL, les deux triangles ADI et AFL, sont semblables; comme cette vérité a lieu, de quelque grandeur que puisse être l'angle A, on doit donc conclure (*fig.* 60) que les triangles AGH, AHI, AIK, AKL, sont semblables aux triangles ABC,

ACD, *ADE*, *AEF* chacun à chacun, et que par conséquent (109) *KL* : *EF* :: *AK* : *AE* :: *KI* : *DE* :: *AI* : *AD* :: *IH* : *CD* :: *AH* : *AC* :: *GH* : *BC*; donc, en ne tirant de cette suite de rapports, que ceux qui renferment des parties des lignes *GL* et *BF*, on aura *KL* : *EF* :: *KI* : *DE* :: *IH* : *CD* :: *GH* : *BC*; c'est-à-dire, que *si d'un point* A, *on tire à différens points d'une ligne droite* GL, *plusieurs autres lignes droites; ces lignes couperont toute parallèle à* GL, *de la même manière qu'elles coupent* GL, *c'est-à-dire*, *en parties qui auront entr'elles les mêmes rapports que les parties correspondantes de* GL.

116. La proposition enseignée (101) fournit le moyen de diviser une ligne donnée en parties égales, ou en parties qui aient entr'elles des rapports donnés. Supposons que *AR* (*fig.* 56) soit une ligne qu'on veut diviser en deux parties qui aient entr'elles un rapport donné, par exemple, celui de 7 à 3; on tirera par le point *A*, et sous tel angle qu'on voudra, une ligne indéfinie *AZ*, et ayant pris arbitrairement une ouverture de compas *AB*, on la portera dix fois le long de *AZ*; je suppose que *Q* soit l'extrémité de la dernière partie; on joindra les extrémités *Q* et *R* de la ligne *AQ*, et de la ligne donnée *AR*; alors si par le point *D*, extrémité de la troisième division, on tire *DI* parallèle à *QR*, la ligne *AR* sera divisée en deux parties *RI* et *AI* qui seront entr'elles :: 7 : 3; car (101 et 102) elles sont entr'elles :: *DQ* : *AD* que l'on a faites de 7 et de 3 parties.

On voit par-là que si l'on vouloit diviser la ligne *AR* en

en un plus grand nombre de parties, par exemple, en 5 parties, qui fussent entr'elles comme les nombres 7, 5, 4, 3, 2; on ajouteroit tous ces nombres entr'eux, ce qui donneroit 21; on porteroit vingt-une ouvertures de compas sur la ligne *AZ*, et on tireroit des parallèles à la ligne *QR*, par les extrémités de la 7ᵉ, 5ᵉ, 4ᵉ, 3ᵉ, 2 division.

Si les rapports étoient donnés en lignes, on mettroit toutes ces lignes bout à bout sur la ligne *AZ*.

On voit donc ce qu'il y auroit à faire, si l'on vouloit diviser la ligne *AR* en parties égales.

Mais quand les parties de la ligne qu'on doit diviser, doivent être petites, ou quand cette ligne elle-même est petite, le plus léger défaut dans les parallèles influe beaucoup sur l'égalité ou l'inégalité des parties; c'est pourquoi il ne sera pas inutile d'exposer la méthode suivante.

117. *fg* (*fig.* 64) est la ligne qu'il s'agit de diviser en parties égales, en 6, par exemple: on tirera une ligne indéfinie *BC*, sur laquelle on portera 6 fois de suite une même ouverture de compas, arbitraire: soit *BC* la ligne qui comprend ces six parties, on décrira sur *BC* un triangle équilatéral *BAC*, en décrivant des deux points *B* et *C* comme centres, et de l'intervalle *BC* comme rayon, deux arcs qui se coupent en *A*. Sur les côtés *AB*, *AC*, on prendra les parties *AF*, *AG* égales chacune à *fg*; et ayant tiré *FG*, cette ligne sera égale à *fg*; on mènera du point *A* à tous les points de division de *BC*, des lignes droites, qui couperont *FG* de la même manière que *BC* est coupée.

Car les lignes *AF*, *AG* étant égales entr'elles, et les lignes *AB*, *AC* aussi égales entr'elles, on a *AB* : *AF* :: *AC* : *AG*; donc *AB*, *AC* sont coupées proportionnel-

Digitized by Google

lement en *F* et *G*; donc *FG* est parallèle à *BC*, et par conséquent (113) le triangle *FAG* est semblable à *ABC*; donc *FAG* est équilatéral; donc *FG* est égale à *AF*, et par conséquent à *fg*; de plus *FG* étant parallèle à *BC*, ces deux lignes (115) doivent être coupées proportionnellement par les lignes menées du point *A* à la droite *BC*.

Ce que nous venons d'exposer peut servir à former et à diviser l'échelle qui doit servir lorsqu'on veut réduire une figure, du grand au petit; mais l'échelle la plus commode dans un grand nombre d'opérations, est celle qu'on appelle échelle de *dixme*: voici comment elle se construit. Aux extrémités *A* et *B* de la ligne *AB* (*fig.* 65) qu'on veut diviser en 100 parties, on élève les perpendiculaires *AC*, *BD* sur chacune desquelles on porte dix ouvertures de compas égales entr'elles, mais de grandeur arbitraire; ayant tiré *CD* on divise *AB* en 10 parties, et on porte ces parties sur *CD*, après quoi on tire des transversales, comme on le voit dans la figure; et par les points de division correspondans de *CA* et de *BD*, on tire des lignes droites qui sont autant de parallèles à *AB*; alors on est dans le même cas que si l'on avoit divisé *AB* en 100 parties; si l'on veut, par exemple, avoir 47 parties dont *AB* en contient 100, je prends sur la ligne qui passe au n°. 7, la partie 7 *H* depuis *CA* jusqu'à la transversale qui passe par le n°. 40, et ainsi pour tout autre nombre.

En effet, à cause des triangles semblables *C* 7 *v*, *CAx* il est évident que 7*v* contient 7 parties dont *Ax* en contiendroit 10; donc puisque *v H* contient 4 intervalles égaux à *Ax*, la ligne entière 7 *H* vaut 47 parties dont *Ax* en contiendroit 10; c'est-à-dire, 47 parties dont *AB* en contiendroit 100.

118. La proposition démontrée (102) peut servir à *trouver une quatrième proportionnelle à trois lignes données* a b, c d, e f (*fig.* 57), c'est-à-dire, une ligne qui soit le quatrième terme d'une proportion, dont les trois premiers seroient *a b*, *c d*, *e f*. Pour cet effet, après avoir tiré deux droites indéfinies *AF*, *AL* qui fassent entre elles tel angle qu'on voudra, on portera *a b* de *A* en *D*, et *c d* de *A* en *F*; on portera pareillement *e f* de *A* en *I*; et ayant joint les deux points *D* et *I* par la droite *DI*, on mènera par le point *F* la ligne *FL* parallèle à *DI* qui déterminera *AL* pour la quatrième proportionnelle cherchée.

On peut aussi, en vertu de la proposition enseignée (109), s'y prendre de cette autre manière. Prendre sur une ligne indéfinie *AF* (*fig.* 57), les deux parties *AD*, *AF* égales à *a b*, *c d* respectivement; et ayant tiré *DI* égale à *e f*, et sous tel angle qu'on voudra, on tirera par le point *A* et le point *I*, la droite *AIL* que l'on coupera par une ligne *FL* parallèle à *DI*; cette parallèle sera le quatrième terme cherché.

Quand les deux termes moyens d'une proportion sont égaux, le quatrième terme s'appelle alors *troisième proportionnel*, parce qu'il n'y a que trois quantités différentes dans la proportion. Ainsi quand on demande une troisième proportionnelle à deux lignes données, il faut entendre qu'on demande le quatrième terme d'une proportion, dans laquelle la seconde des deux lignes données fait l'office des deux moyens, et l'opération est la même que celle qu'on vient d'enseigner.

La théorie des lignes proportionnelles, et des triangles semblables, est la base d'un grand nombre d'opérations de la Géométrie-pratique. Nous ferons connoître les principales; mais nous ne parlerons, pour le présent, que de

Digitized by Google

celles qui peuvent être exécutées sans la mesure des angles; c'est-à-dire, uniquement avec le secours de piquets et de cordeaux. Nous parlerons des autres, lorsqu'à l'occasion de la Trigonométrie, nous aurons fait connoître les instrumens qui servent à mesurer les angles.

1°. Supposons qu'on ait dessein de jeter un pont sur une rivière, et que dans cette vue on veuille connoître la largeur *AB* de cette rivière (*fig.* 66).

Dans l'alignement de *AB*, et à une distance *BC* qui soit au moins le tiers de la largeur *AB* estimée grossièrement, on plantera un piquet *C*, et l'on mesurera *BC*. A droite ou à gauche de *BC* et suivant telle direction, qu'on le voudra d'ailleurs, on mesurera une distance quelconque *CE* (la plus longue sera la meilleure). On fixera le milieu *D* de *CE*, et ayant déterminé le point *F* qui est en même temps dans l'alignement *BE* et dans l'alignement *AD*, on mesurera *BF* et *FE*. Alors on déterminera *AB* par cette proportion $FE - BF : \frac{1}{2}BC :: BF : AB$.

En effet, si par le milieu *D* on conçoit *DG* parallèle à *AB*, le point *G* où elle rencontrera *BE* sera (102) le milieu de *BE*, et *FG* sera par conséquent égale à $FE - BF$. Mais les triangles *FGD* et *ABF* semblables, à cause des parallèles, donnent $FG : GD :: BF : AB$. D'ailleurs à cause des triangles semblables *EDG*, *ECB*, on a *DG* moitié de *CB*, puisque *ED* est moitié de *EC*; donc *FG* ou $FE - BF : \frac{1}{2}BC :: BF : AB$.

2°. On peut s'y prendre de cette autre manière, pour mesurer les distances.

Supposons qu'il soit question de mesurer la distance d'un point *B* de la tranchée (*fig.* 67) pris sur la capitale de la demi-lune, au sommet *A* de l'angle saillant du chemin couvert.

On fera *BC* perpendiculaire à *AB*, et d'une longueur

Digitized by Google

arbitraire. On plantera un piquet en un point *E* de *BC*, tel que *CE* soit égal à *BE*, ou en soit partie aliquote, comme la moitié, le tiers, etc. alors on s'éloignera sur la ligne *CD* perpendiculaire à *BC*, jusqu'à ce que de son extrémité *D* on voye le piquet *E* se confondre avec le point *A*. Alors *AB* sera égal à *CD*, si on a fait *BE* égal à *CE*; et *AB* sera le double ou le triple de *CD* si on a fait *CE*, la moitié ou le tiers de *BE*. Cela est évident, si on fait attention que les lignes *CD* et *AB* étant parallèles, les triangles *ABE*, *ECD* sont semblables.

3°. S'agit-il de mesurer une distance inaccessible *AB* (*fig.* 68)?

On prendra un point *C* tellement situé qu'on puisse de ce point voir les deux points *A* et *B*, et mesurer sur les alignemens des parties *CD*, *CE*, qui soient le plus approchantes qu'il sera possible de *CA* et *CB*, quoiqu'à la rigueur, on puisse les prendre petites à l'égard de *CA* et *CB*.

Par les moyens qu'on vient d'enséigner, ou par d'autres semblables qu'on peut imaginer d'après ceux-là, on déterminera la longueur de *CA*, et celle de *CB*; puis ayant placé sur les alignemens *CA* et *CB*, les piquets *D* et *E*, de manière que *CD* soit à *CE* :: *CA* : *CB*, (ce qui est facile puisque l'on connoît *CA* et *CB*, et que l'on peut prendre arbitrairement *CD*) on mesurera *DE*; alors on aura *AB*, par cette proportion *CD* : *DE* :: *CA* : *AB*, fondée sur ce que les deux triangles *CAB*, *CDE* ayant un angle égal compris entre côtés proportionnels, sont semblables (113).

4°. Sil est question de mener par un point connu *C* (*fig.* 70) sur le terrein (n'ayant autre chose que des piquets), une parallèle à une ligne inaccessible *AB*.

Ayant pris arbitrairement le point *D*, on prendra sur

l'alignement *A D*, un point *E* qui soit en même temps dans l'alignement de *B* et *C*. De ce point *E*, on mènera une parallèle *E G* à la ligne supposée accessible *D B*; puis du point *C* on mènera *G C F* parallèle à *A D*, et qui rencontrera *B D* en un point *F*. Sur *E G*, on marquera un point *H* qui soit dans l'alignement *F A*; et la ligne *K C H I* que l'on fera passer par ces points, sera la parallèle demandée.

Car, à cause des parallèles *FG* et *AD*, les triangles *FHG* et *FAD* sont semblables et donnent *FG* ou *ED* : *GH* :: *AD* : *FD*. Par la même raison, les triangles *ECG*, *BED* donnent *EG* ou *FD* : *GC* :: *BD* : *DE*. Ces deux proportions ayant les mêmes extrêmes, le produit des moyens sera égal dans l'une et dans l'autre, et l'on pourra par conséquent (*Arithmét.* 170) former de ces quatre quantités la proportion suivante, *GC* : *GH* :: *AD* : *BD*; les deux triangles *GCH* et *ABD* ont donc un angle égal compris entre côtés proportionnels; car il est évident, à cause du parallélogramme *GEDF*, que l'angle *G* est égal à l'angle *D*. Donc l'angle *GCH* ou son opposé *KCF* est égal à l'angle *BAD*; donc *CF* ayant été faite parallèle à *AD*, *CK* l'est nécessairement à *AB*.

5°. Connoissant l'épaisseur de l'épaulement d'une batterie (*fig.* 69), et l'ouverture extérieure *HK*, et intérieure *AB*, d'une embrasure que l'on veut dégorger, il s'agit de déterminer la direction des joues *HA* et *KB*.

Si on imagine que *P* soit le point où prolongées elles doivent se rencontrer, les triangles semblables *HKP*, *ABP* donneront *HK* : *AB* :: *HP* : *AP*. Et si par les milieux *G* et *C* on conçoit la ligne du tir *GCP*, les triangles semblables *HGP*, *ACP* donnent *HP* : *AP* :: *GP* : *CP*; donc *HK* : *AB* :: *GP* : *CP*, et par consé-

quent (*Arith.* 174) $HK - AB : AB :: GC : CP$; on connoîtra donc CP; c'est-à-dire la quantité dont il faut s'éloigner du milieu de l'ouverture C perpendiculairement à AB, pour avoir le point P qui avec A et B est dans les alignemens que doivent avoir les joues AH, BK.

6°. C'est par une application à peu près pareille des triangles semblables que l'on peut déterminer le point de rencontre C (*fig.* 71) de la ligne de mire avec le prolongement de l'axe d'une pièce de canon.

Le boulet, par sa pesanteur, s'écarte au sortir de la pièce, de la direction suivant laquelle il est chassé; en sorte que si la ligne de mire GH étoit parallèle à l'axe de la pièce, le boulet frapperoit toujours au-dessous du point de mire. Pour prévenir cette erreur, on donne à la ligne de mire GH une inclinaison telle que cette ligne rencontre l'axe à une distance AC moindre que celle à laquelle le boulet pourra rencontrer cette ligne de mire prolongée. Pour déterminer ce point C, il ne s'agit que de connoître la longueur AB de l'axe de la pièce, comprise entre les deux points de mire G et H, et les hauteurs GA et HB de ces deux points, au-desus de l'axe. Alors les triangles semblables GAC et HBC donnent $GA : HB :: AC : BC$, d'où (*Arith.* 174) on conclut $GA - HB : HB :: AB : BC$, où tout est connu excepté BC.

Des Lignes proportionnelles considérées dans le Cercle.

119. Deux lignes sont dites coupées en raison *inverse* ou *réciproque*, lorsque pour former une proportion avec les parties de ces lignes, les deux parties de l'une se trouvent être les extrêmes, et les

deux parties de l'autre, les moyens de la proportion.

Et deux lignes sont dites *réciproquement proportionnelles* à leurs parties, lorsqu'une de ces lignes et sa partie forment les extrêmes, tandis que l'autre ligne et sa partie forment les moyens.

120. *Deux cordes* AC *et* BD (fig. 72) *qui se coupent dans le cercle, en quelque point* E *que ce soit, et sous quelque angle que ce soit, se coupent toujours en raison réciproque.* C'est-à-dire, que $AE : BE :: DE : CE$.

Car si l'on tire les cordes AB, CD, on forme deux triangles BEA, CED qu'il est aisé de démontrer être semblables ; puisqu'outre l'angle BEA égal à CED (20), l'angle ABE ou ABD est égal à l'angle DCE ou DCA ; car ces deux angles ont leur sommet à la circonférence, et s'appuient sur le même arc AD (64). Donc les triangles BEA et CED sont semblables (109); donc ils ont leurs côtés homologues proportionnels, c'est-à-dire que $AE : BE :: DE : CE$, où l'on voit que les parties de la corde AC sont les extrêmes, et les parties de la corde BD sont les moyens.

121. Puisque la proposition qu'on vient de démontrer, a lieu quelque part que soit le point E, et sous quelque angle que se coupent les deux cordes AC et BD, elle a donc lieu aussi lors-

que les deux cordes (*fig.* 73), sont perpendiculaires l'une à l'autre, et que l'une des deux, *AC* par exemple, passe par le centre ; or dans ce cas, la corde *BD* étant coupée en deux parties égales (52), les deux termes moyens de la proportion *AE* : *BE* :: *DE* : *CE*, deviennent égaux, et la proportion se change en cette autre, *AE* : *BE* :: *BE* : *CE* ; donc *toute perpendiculaire* BE *abaissée d'un point B de la circonférence, sur le diamètre, est moyenne proportionnelle entre les deux parties* AE, CE *de ce diamètre.*

122. Cette proposition a plusieurs applications utiles. Nous n'en exposerons qu'une pour le présent. C'est pour *trouver une moyenne proportionnelle entre deux lignes données*, ae, ec, (fig. 74).

On tirera une droite indéfinie *AC* sur laquelle on placera, bout-à-bout, deux lignes *AE*, *EC* égales aux lignes *ae*, *ec* ; et ayant décrit sur la totalité *AC* comme diamètre, le demi-cercle *ABC*, on élèvera au point de jonction *E* la perpendiculaire *EB* sur *AC* ; cette perpendiculaire sera la moyenne proportionnelle demandée.

123. *Deux sécantes* AB, AC (fig. 75) *qui partant d'un même point* A *hors du cercle, vont se terminer à la partie concave de la circonférence, sont toujours réciproquement proportionnelles à leurs parties extérieures* AD, AE, *à quelqu'endroit que soit le point* A *hors du cercle, et quelqu'angle que fassent entr'elles ces deux sécantes.*

Concevez les cordes *CD* et *BE*, vous aurez deux triangles *ADC*, *AEB*, dans lesquels 1°. l'angle *A* est commun : 2° l'angle *B* est égal à l'angle *C*, parce que l'un et l'autre ont leur sommet à la circonférence, et embrassent le même arc *DE* (64) ; donc (109) ces deux triangles sont semblables, et ont par conséquent les côtés proportionnels ; donc *AB* : *AC* :: *AE* : *AD*, où l'on voit que la sécante *AB* et sa partie extérieure *AD* forment les extrêmes, tandis que la sécante *AC* et sa partie extérieure *AE* forment les moyens.

124. Puisque cette proposition est vraie, quel que soit l'angle *BAC* ; si l'on conçoit que le côté *AB* demeurant fixe, le côté *AC* tourne autour du point *A* pour s'écarter de *AB*, les deux points de section *E* et *C* s'approcheront continuellement l'un de l'autre, jusqu'à ce qu'enfin la droite *AC* tombant sur la tangente *AF*, ces deux points se confondront, et *AC*, *AE* deviendront chacune égale à *AF*; en sorte que la proportion *AB* : *AC* :: *AE* : *AD* deviendra *AB* : *AF* :: *AF* : *AD*; donc

Si d'un point A, *pris hors du cercle, on mène une sécante quelconque* AB *et une tangente* AF, *cette tangente sera moyenne proportionnelle entre la sécante* AB *et la partie extérieure* AD *de cette même sécante.*

Digitized by Google

125. Cette proposition peut, entr'autres usages, servir à *couper une ligne en moyenne et extrême raison*. On dit qu'une ligne AB (*fig.* 76) est coupée en moyenne et extrême raison, lorsqu'elle est coupée en deux parties AC, BC, telles que l'une BC de ces parties est moyenne proportionnelle entre la ligne entière AB et l'autre partie AC, c'est-à-dire, telles que l'on ait

$$AC : BC :: BC : AB.$$

Voici comment on y parvient. On élève à l'une A des extrémités, une perpendiculaire AD égale à la moitié de AB; du point D comme centre, et d'un rayon égal à AD, on décrit une circonférence qui coupe en E la ligne BD qui joint les deux points B et D. Enfin on porte BE de B en C, et la ligne AB est coupée en moyenne et extrême raison, au point C.

En effet, la ligne AB étant perpendiculaire sur AD, est tangente (49); et puisque BF est sécante, on a (124) $BF : AB :: AB : BE$ ou BC. Donc (*Arithmét.* 175) $BF - AB : AB - BC :: AB : BC$; or AB est égal à FE, puisque AB est double de AD; donc $BF - AB$ est égal à BE ou BC; et comme $AB - BC$ est AC, on a donc $BC : AC :: AB : BC$, ou (*Arithmétique* 171) $AC : BC :: BC : AB$.

Des Figures semblables.

126. Deux figures d'un même nombre de côtés, sont dites *semblables*, lorsqu'elles ont les angles homologues égaux, et les côtés homologues proportionnels.

Les deux figures $ABCDE$, $abcde$ (*fig.* 77)

sont semblables si l'angle *A* est égal à l'angle *a*; l'angle *B*, égal à l'angle *b*; l'angle *C*, égal à l'angle *c*, et ainsi de suite; et si en même temps, le côté *AB* contient le côté *ab*, autant que *BC* contient *bc*, autant que *CD* contient *cd*, et ainsi de suite.

Ces deux conditions sont nécessaires à la fois dans les figures de plus de trois côtés. Il n'y a que dans les triangles où l'une de ces conditions suffise, parce qu'elle entraîne nécessairement l'autre (109 et 114).

127. *Si de deux angles homologues* A *et* a, *de deux polygones semblables, on mène des diagonales* AC, AD, ac, ad, *aux autres angles; les deux polygones seront partagés en un même nombre de triangles semblables chacun à chacun.*

Car l'angle *B* est (par supposition) égal à l'angle *b* et le côté *AB* : *ab* :: *BC* : *bc*; donc les deux triangles *ABC*, *abc* qui ont un angle égal compris entre deux côtés proportionnels, sont semblables (113); donc l'angle *BCA* est égal à l'angle *bca*, et *AC* : *ac* :: *BC* : *bc*.

Si des angles égaux *BCD*, *bcd*, on ôte les angles égaux *BCA*, *bca*, les angles restans *ACD*, *acd* seront égaux. Or *BC* : *bc* :: *CD* : *cd*; donc, puisqu'on vient de prouver que *BC* : *bc* :: *AC* : *ac*, on aura *CD* : *cd* :: *AC* : *ac*; donc les

deux triangles *ACD*, *acd* sont aussi semblables, puisqu'ils ont un angle égal compris entre deux côtés proportionnels. On prouvera la même chose, et de la même manière, pour les triangles *ADE* et *ade*, et pour tous les autres triangles qui suivroient, si ces polygones avoient un plus grand nombre de côtés.

128. *Si deux polygones* ABCDE, abcde *sont composés d'un même nombre de triangles semblables chacun à chacun, et semblablement disposés, ils seront semblables.*

Car les angles *B* et *E* sont égaux aux angles *b* et *e*, dès que les triangles sont semblables; et par cette même raison, les angles partiels *BCA*, *ACD*, *CDA*, *ADE* sont égaux aux angles partiels *bca*, *acd*, *cda*, *ade*; donc les angles totaux *BCD*, *CDE* sont égaux aux angles totaux *bcd*, *cde*, chacun à chacun. D'ailleurs la similitude des triangles fournit cette suite de rapports égaux *AB* : *ab* :: *BC* : *bc* :: *AC* : *ac* :: *CD* : *cd* :: *AD* : *ad* :: *DE* : *de* :: *AE* : *ae*; ne tirant de cette suite, que les rapports qui renferment les côtés des deux polygones, on a *AB* : *ab* :: *BC* : *bc* :: *CD* : *cd* :: *DE* : *de* :: *AE* : *ae*. Donc ces polygones ont aussi les côtés homologues proportionnels; donc ils sont semblables.

Donc pour construire une figure semblable à une figure

proposée *ABCDE* (*fig.* 77), et qui ait pour côté homologue à *AB*, une ligne donnée ; on portera cette ligne donnée sur *AB*, de *A* en *f*; par le point *f*, on tirera *fg* parallèle à *BC*, et qui rencontre *AC* en *g*; par le point *g*, on mènera *gh* parallèle à *CD*, et qui rencontre *AD* en *h*; enfin par le point *h*, on tirera *hi* parallèle à *ED*, et l'on aura le polygone *Afghi* semblable à *ABCDE*.

129. *Les contours de deux figures semblables sont entr'eux comme les côtés homologues de ces figures ;* c'es-à-dire, que la somme des côtés de la figure *ABCDE* contient la somme des côtés de la figure *abcde*, autant que le côté *AB* contient le côté *ab*.

Car dans la suite des rapports égaux *AB* : *ab* :: *BC* : *bc* :: *CD* : *cd* :: *DE* : *de* :: *AE* : *ae*, la somme des antécédens, est (*Arith.* 175) à la somme des conséquens, comme un antécédent est à son conséquent, :: *AB* : *ab* ; or il est évident que ces sommes sont les contours des deux figures.

130. Si l'on conçoit la circonférence. . . . *ABCDEFGH* (*fig.* 78) divisée en tel nombre de parties égales qu'on voudra ; et si ayant tiré du centre *I*, aux points de division, des rayons *IA*, *IB*, *etc.* on décrit d'un autre rayon *Ia*, la circonférence *abcdefgh*, rencontrée par ces rayons aux points *a*, *b*, *c*, *d*, etc. il est évident que si, dans chaque circonférence, on joint les

points de division par des cordes, on formera deux polygones semblables ; car les triangles *ABI*, *abI*, etc. sont semblables, puisqu'ils ont un angle commun en *I* compris entre deux côtés proportionnels ; car *IA* étant égal à *IB*, et *Ia* égal à *Ib*, on a évidemment *AI* : *BI* :: *aI* : *bI*, et la même chose se démontre de même pour les autres triangles. De-là et de ce qui vient d'être dit (129) on conclura donc que le contour *ABCDEFGH* est au contour *abcdefgh* :: *AB* : *ab*, ou (à cause des triangles semblables *ABI*, *abI*) :: *AI* : *aI*. Comme cette similitude ne dépend point du nombre des côtés de ces deux polygones, elle aura donc encore lieu lorsque le nombre des côtés de chacun sera multiplié à l'infini ; or dans ce cas on conçoit qu'il n'y a plus aucune différence entre la circonférence et le polygone inscrit ; donc les circonférences mêmes *ABCDEFGH*, *abcdefgh* seront entr'elles :: *AI* : *aI*, c'est-à-dire, comme leurs rayons, et par conséquent aussi comme leurs diamètres.

131. Concluons donc, 1.° qu'*on peut regarder la circonférence du cercle comme un polygone régulier d'une infinité de côtés.*

2°. *Les cercles sont des figures semblables.*

3°. *Les circonférences des cercles sont entr'elles comme leurs rayons, ou comme leurs diamètres.*

132. En général, si dans deux polygones semblables, on tire deux lignes également inclinées à l'égard de deux côtés homologues, et terminées à des points semblablement placés à l'égard de ces côtés, ces lignes qu'on appelle *lignes homologues*, seront entr'elles dans le rapport de deux côtés homologues quelconques. Car dès qu'elles font des angles égaux avec deux côtés homologues, elles feront aussi des angles égaux avec deux autres côtés homologues quelconques, puisque les angles de deux polygones semblables, sont égaux chacun à chacun; or si dans ce cas elles n'étoient pas dans le même rapport que deux côtés homologues, il est facile de sentir que les points où elles se terminent, ne pourroient pas être semblablement placés comme on le suppose.

Digitized by Google

DEUXIÈME SECTION.

Des Surfaces.

133. NOUS allons examiner les propriétés de la seconde des trois sortes d'étendue que nous avons distinguées ; c'est-à-dire, de l'étendue en longueur et largeur.

Nous ne considérerons, dans cette section, que les *surfaces* ou *superficies planes ;* nous nous bornerons même à celles des figures rectilignes, et du cercle.

La mesure des surfaces se réduit à celle des triangles, ou à celle des quadrilatères.

On distingue les quadrilatères en *Quadrilatère* simplement dit, *Trapèze*, et *Parallélogramme*.

La figure de quatre côtés, qu'on appelle simplement *Quadrilatère*, est celle parmi les côtés de laquelle il ne s'en trouve aucun qui soit parallèle à un autre. (*Voyez fig.* 83).

Le *Trapèze* est un quadrilatère dont deux côtés seulement sont parallèles (*fig.* 84).

Le *Parallélogramme* est un quadrilatère dont les côtés opposés sont parallèles (*fig.* 79, 80, 81, 82, 88, 89) ; on distingue quatre sortes

de parallélogrammes ; le *rhomboïde*, le *rhombe*, le *rectangle* et le *quarré.*

Le *rhomboïde* est le parallélogramme dont les côtés contigus, et les angles, sont inégaux, (*fig.* 79).

Le *rhombe*, autrement dit *lozange*, est celui dont les côtés sont égaux, et les angles inégaux, (*fig.* 80).

Le *rectangle*, est celui dont les angles sont égaux, et les côtés contigus inégaux, (*fig.* 81).

Le *quarré* est celui dont les côtés et les angles sont égaux, (*fig.* 82).

Quand les angles d'un quadrilatère sont égaux, ils sont nécessairement droits, parce que les quatre angles de tout quadrilatère, valent ensemble quatre angles droits (86).

La perpendiculaire *EF* (*fig.* 79), menée entre les deux côtés opposés d'un parallélogramme, s'appelle *la hauteur* de ce parallélogramme ; et le côté *BC* sur lequel tombe cette perpendiculaire, s'appelle la *base.*

La hauteur d'un triangle *ABC* (*fig.* 85, 86 et 87), est la perpendiculaire *AD* abaissée d'un angle *A* de ce triangle, sur le côté opposé *BC*, prolongé, s'il est nécessaire ; et ce côté *BC* se nomme alors la *base.*

134. *Un triangle rectiligne quelconque* ABC (fig. 87) *est toujours la moitié d'un parallélogramme de même base et de même hauteur que lui.*

Digitized by Google

Car on peut toujours concevoir tirée, par le sommet de l'angle *C*, une ligne *CE* parallèle au côté *BA*, et par le sommet de l'angle *A*, une ligne *AE* parallèle au côté *BC*; ce qui forme avec les côtés *AB* et *BC*, un parallélogramme *ABCE* de même base et de même hauteur que le triangle *ABC*; cela posé, il est aisé de voir que les deux triangles *ABC*, *CEA* sont égaux; car le côté *AC* leur est commun; d'ailleurs les angles *BAC*, *ACE* sont égaux, à cause des parallèles (38); et par la même raison, les angles *BCA* et *CAE* sont égaux; ces deux triangles ayant un côté égal adjacent à deux angles égaux chacun à chacun, sont donc égaux; donc le triangle *ABC* est la moitié du parallélogramme *ABCE*.

135. *Les parallélogrammes* ABCD, EBCF (fig. 88 et 89) *de même base et de même hauteur, sont égaux en surface.*

Les deux parallélogrammes *ABCD*, *EBCF* (*fig.* 88), ont une partie commune *EBCD*; ainsi leur égalité ne dépend que de l'égalité des triangles *ABE*, *DCF*; or il est aisé de prouver que ces deux triangles sont égaux: car *AB* est égale à *CD*, ces lignes étant des parallèles comprises entre parallèles (82); et par la même raison, *BE* est égale à *CF*; d'ailleurs (43)

l'angle *ABE* est égal à l'angle *DCF* ; ces deux triangles ont donc un angle égal compris entre deux côtés égaux, chacun à chacun ; ils sont donc égaux ; donc aussi le parallélogramme *ABCD* et le parallélogramme *EBCF* sont égaux.

Dans la *figure* 89, on démontrera de la même manière que les deux triangles *ABE*, *DCF* sont égaux ; donc, retranchant de chacun le triangle *DIE*, les deux trapezes restans *ABID*, *EICF* seront égaux ; enfin ajoutant à chacun de ces trapezes le triangle *BIC*, le parallélogramme *ABCD* et le parallélogramme *EBCF* qui en résulteront, seront égaux.

136. On peut donc dire aussi, que *les triangles de même base et de même hauteur, ou de bases égales et de hauteurs égales, sont égaux.* Puisqu'ils sont moitiés de parallélogrammes de même base et de même hauteur qu'eux (134).

137. De cette dernière proposition on peut conclure que *tout polygone peut être transformé en un triangle de même surface.* Par exemple, soit *ABCDE* (*fig.* 90) un pentagone ; si l'on tire la diagonale *EC* qui joigne les extrémités de deux côtés contigus *ED*, *DC*, et qu'après avoir mené *DF* parallèle à *EC*, et qui rencontre en *F*, le côté *AE* prolongé, on tire *CF*, on aura un quadrilatère *ABCF* égal en surface au pentagone

Digitized by Google

ABCDE; car les deux triangles *ECD*, *ECF*, ont pour base commune *EC*; et étant de plus, compris entre mêmes parallèles *EC*, *DF*, ils sont de même hauteur; donc ils sont egaux; donc si l'on ajoute à chacun le quadrilatère *EABC*, on aura le pentagone *ABCDE* égal au quadrilatère *ABCF*.

Or de même qu'on vient de réduire le pentagone, à un quadrilatère, on réduira de même le quadrilatère, à un triangle; donc, etc.

Et *pour transformer un triangle en un quarré de même surface*; la question se réduit à prendre (122) ou (*Arith.* 168) une moyenne proportionnelle entre la base et la moitié de la hauteur; puisque (*Arith.* 168) le quarré de cette moyenne proportionnelle sera égal au produit de ces deux facteurs.

On peut donc transformer une figure quelconque en un quarré de même surface.

De la mesure des Surfaces.

138. *Mesurer une surface*, c'est déterminer combien de fois cette surface contient une autre surface connue.

Les mesures qu'on emploie sont ordinairement des quarrés; quelquefois aussi ce sont des parallélogrammes rectangles : ainsi, mesurer la sur-

face *ABCD* (*fig.* 91), c'est déterminer combien elle contient de quarrés tels que *abcd*, ou de rectangles tels que *abcd*; si le côté *ab* du quarré *abcd* est d'un pied, c'est déterminer combien la surface *ABCD* contient de pieds quarrés; si le côté *ab* du rectangle *abcd* étant d'un pied, le côté *bc* est de 3 pieds, c'est déterminer combien la surface *ABCD* contient de rectangles de 3 pieds de long sur un pied de large.

Pour mesurer, en parties quarrées, la surface du rectangle *ABCD*, il faut chercher combien de fois le côté *AB* contient le côté *ab* du quarré *abcd* qui doit servir d'unité ou de mesure; chercher de même combien de fois le côté *BC* contient *ab*; et alors multipliant ces deux nombres l'un par l'autre, on aura le nombre de quarrés tels que *abcd*, que la surface *ABCD* peut renfermer.

Par exemple, si *AB* contient *ab*, quatre fois; et si *BC* contient *ab*, sept fois; je multiplie 7 par 4, et le produit 28 marque que le rectangle *ABCD* contient 28 quarrés tels que *abcd*.

Car si par les points de division *E*, *F*, *G*, on mène des parallèles à *BC*, on aura quatre rectangles égaux, dont chacun pourra contenir autant de quarrés, tels que *abcd*, qu'il y a de parties égales à *ab* dans le côté *BC*; donc il

Digitized by Google

faut répéter les quarrés contenus dans l'un de ces rectangles, autant de fois qu'il y a de rectangles ; c'est-à-dire, autant de fois que le côté *AB* contient *ab*; et comme le nombre des quarrés contenus dans chaque rectangle, est le même que le nombre des parties de *BC*, il est donc évident qu'en multipliant le nombre des parties de *BC*, par le nombre des parties égales de *AB*, on a le nombre de quarrés tels que *abcd*, que le rectangle *ABCD* peut renfermer.

Quoique nous ayons supposé dans le raisonnement que nous venons de faire, que les côtés *AB* et *BC* contenoient un nombre exact de mesures *ab*, ce raisonnement ne s'étend pas moins au cas où la mesure *ab* n'y seroit pas contenue exactement.

Par exemple, si *BC* ne contenoit que 6 mesures et $\frac{1}{2}$, chaque rectangle ne contiendroit que 6 quarrés et $\frac{1}{2}$; et si le côté *AB* ne contenoit que 3 mesures et $\frac{1}{3}$; il n'y auroit que 3 rectangles et $\frac{1}{3}$, chacun de 6 quarrés $\frac{1}{2}$; il faudroit donc multiplier $6\frac{1}{2}$ par $3\frac{1}{3}$, c'est-à-dire, le nombre des mesures de *BC* par le nombre des mesures de *AB*.

Si au lieu d'évaluer la surface *ABCD* (*fig.* 91) en parties quarrées, on vouloit l'évaluer en parties rectangulaires *abcd*; un raisonnement semblable fait voir qu'il faudra mesurer *AB* en parties telles que *ab*, et *BC* en parties telles que *bc*; et mul-

tiplier l'un par l'autre le nombre des parties de chaque espèce.

Par exemple, si on veut savoir combien il faut de saucissons de 18 pieds de long, et de 11 pouces de grosseur, pour le revêtement intérieur d'une batterie de mortier longue de 21 toises et haute de 7 pieds 4 pouces; on verra que la grosseur 11 pouces, est contenue 8 fois dans la hauteur 7 pieds 4 pouces; et que la longueur 18 pieds, est contenue 7 fois dans la longueur 21 toises; on multipliera donc 7 par 8, et le produit 56 exprimera le nombre cherché de saucissons.

Au reste lorsqu'il s'agit de mesurer une surface en parties rectangulaires, on peut le faire aussi en mesurant d'abord en parties quarrées, et divisant le nombre de ces parties par celui des mesures quarrées pareilles, que contient la mesure rectangulaire que l'on emploie.

139. Puisque (135) le parallélogramme rectangle *ABCD*, (*fig.* 88 *et* 89) est égal au parallélogramme *EBCF* de même base et de même hauteur; il s'ensuit donc que pour avoir la surface de celui-ci, il faudra multiplier le nombre des parties de sa base *BC*, par le nombre des parties de sa hauteur *BA*; on peut donc dire en général. . . . .

Pour avoir le nombre de mesures quarrées contenues dans la surface d'un parallélogramme quelconque ABCD, (fig. 79), *il faut mesurer la base*

Digitized by Google

BC *et la hauteur* EF, *avec une même mesure, et multiplier le nombre des mesures de la base, par le nombre des mesures de la hauteur.*

On voit donc, par ce qui a été dit (138), que lorsqu'on veut évaluer la surface *ABCD*, (*fig.* 91), on ne fait autre chose que répéter la surface *GBCH* ou le nombre des quarrés qu'elle contient, autant de fois que son côté *GB* est contenu dans le côté *AB*; ainsi le multiplicande est réellement une surface, et le multiplicateur est un nombre abstrait qui ne fait que marquer combien de fois on doit répéter ce multiplicande.

On dit cependant, très-communément, que *pour avoir la surface d'un parallélogramme, il faut multiplier sa base par sa hauteur;* mais on doit regarder cela comme une expression abrégée, dans laquelle on sous-entend le *nombre* des quarrés correspondans aux parties de la base et le *nombre* des parties de la hauteur. En un mot, on ne peut pas dire qu'on multiplie une ligne par une ligne. Multiplier, c'est prendre un certain nombre de fois; de sorte que quand on multiplie une ligne on ne peut jamais avoir qu'une ligne; et quand on multiplie une surface, on ne peut jamais avoir qu'une surface. Une surface ne peut avoir d'autres élémens que des surfaces, et quoiqu'on dise souvent que le parallélogramme *ABCD* (*fig.* 79), peut être considéré comme composé d'autant de lignes égales et parallèles à *BC*, qu'il y a de points dans la hauteur *EF*, on doit sous-entendre que ces lignes ont une largeur infiniment petite; (car plusieurs lignes sans largeur ne peuvent pas composer une

surface); et alors chacune de ces lignes est une surface qui étant répétée autant de fois que sa hauteur est dans la hauteur EF, donne la surface $ABCD$.

Nous adopterons néanmoins cette expression, *multiplier une ligne par une ligne;* mais on doit ne pas perdre de vue que ce n'est que comme manière abrégée de parler. Ainsi nous dirons que le produit de deux lignes exprime une surface, quoique dans le vrai on dût dire, le *nombre* des parties d'une ligne multiplié par le *nombre* des parties d'une autre ligne, exprime le nombre de parties quarrées contenues dans le parallélogramme qui auroit une de ces lignes pour hauteur, et l'autre ligne pour base.

Pour marquer la surface du parallélogramme $ABCD$, (*fig.* 79), nous écrirons $BC \times EF$; dans la *figure* 81, nous écrirons $AB \times BC$; et dans la *figure* 82, où les deux côtés AB et BC sont égaux, au lieu de $AB \times BC$ ou $AB \times AB$, nous écrirons $\overline{AB}^2$; de sorte que $\overline{AB}^2$ signifiera la ligne AB multipliée par elle-même, ou la surface du quarré fait sur la ligne AB; de même, pour marquer que la ligne AB est élevée au cube, nous écrirons $\overline{AB}^3$, qui équivaudra à $AB \times AB \times AB$ ou à $\overline{AB}^2 \times AB$.

140. Il suit de ce que nous venons de dire, que pour que deux parallélogrammes soient égaux en surface, il suffit que le produit de la base de l'un, multipliée par la hauteur, soit égal au produit de la base du second, multipliée par la hauteur. Donc, *lorsque deux parallélogrammes sont égaux en surface, ils ont leur base réciproquement proportionnelles à leurs hauteurs;* c'est-à-dire,

que la base et la hauteur de l'un peuvent être considérées comme les extrêmes d'une proportion, dont la base et la hauteur de l'autre formeront les moyens; car en les considérant ainsi, le produit des extrêmes est égal au produit des moyens; or dans ce cas il y a nécessairement proportion (*Arith.* 170).

Au reste, on peut voir cette vérité immédiatement, en faisant attention que si la base de l'un est plus petite, par exemple, que celle de l'autre, il faut que sa hauteur soit plus grande à proportion pour former le même produit.

141. Puisqu'un triangle est la moitié d'un parallélogramme de même base et de même hauteur (134), il suit de ce qui vient d'être dit (139), que *pour avoir la surface d'un triangle, il faut multiplier la base par la hauteur, et prendre la moitié du produit.*

Ainsi, si la hauteur *AD* (*fig.* 85 *et* 86) est de 34 pieds, et la base *BC* de 52, la surface contiendra 884 pieds quarrés; c'est la moitié du produit de 52 par 34.

Il est inutile, je pense, d'insister pour faire sentir qu'on aura le même produit en multipliant la base par la moité de la hauteur, ou la hauteur par la moitié de la base.

142. Donc, 1. *pour avoir la surface du trapeze*, il faut ajouter ensemble les deux côtés

parallèles, prendre la moitié de la somme, et la multiplier par la perpendiculaire menée entre ces deux parallèles. Car si l'on tire la diagonale *BD*, (*fig.* 84), on a deux triangles *ABD*, *BDC* dont la hauteur commune est *EF*. Pour avoir la surface du triangle *ABD*, il faudroit donc multiplier la moitié de *AD* par *EF*; et pour le triangle *BDC*, il faudroit multiplier la moitié de *BC* aussi par *EF*; donc la surface du trapèze vaut la moitié de *AD* multipliée par *EF*, plus la moitié de *BC* multipliée par *EF*; c'est-à-dire, la moitié de la somme *AD* plus *BC*, multipliée par *EF*.

Si par le milieu *G* de la ligne *AB*, on tire *GH* parallèle à *BC*, cette ligne *GH* sera la moitié de la somme des deux lignes *AD* et *BC*. Car, soit *I* le point où *GH* coupe la diagonale *BD*, les triangles *BAD*, *BGI*, semblables, à cause des parallèles *AD* et *GI*, font connoître (109) que *GI* est moitié de *AD*, puisque *BG* est moitié de *AB*. Or *GH* étant parallèle à *BC* et à *AD*, *DC* (102) est coupée de la même manière que *AB*; on prouvera donc de même que *IH* est moitié de *BC*, en considérant les triangles semblables *BDC* et *IDH*.

Donc, et en vertu de ce qui a été dit ci-dessus, on peut dire que *la surface d'un trapèze* ABCD, *est égale au produit de sa hauteur* EF,

par la ligne GH *menée à distances égales des deux bases opposées.*

143. 2°. *Pour avoir la surface d'un polygone quelconque*, il faut le partager en triangles par des lignes menées d'un même point à chacun de ses angles, et calculer séparément la surface de chacun de ces triangles ; en réunissant tous ces produits, on aura la surface totale du polygone. Mais pour avoir le moindre nombre de triangles qu'il soit possible, il conviendra de faire partir toutes ces lignes de l'un des angles; *voyez fig.* 53.

144. *Si le polygone étoit régulier* (*fig.* 78) ; comme tous les côtés sont égaux, et que toutes les perpendiculaires menées du centre, sont égales ; en le concevant composé de triangles qui ont leur sommet au centre, on auroit la surface en multipliant un des côtés par la moitié de la perpendiculaire, et multipliant ce produit par le nombre des côtés ; ou ce qui revient au même, en multipliant le contour par la moitié de la perpendiculaire.

145. Puisqu'on peut (131) considérer le cercle comme un polygone régulier d'une infinité de côtés, il faut donc conclure que *pour avoir la surface d'un cercle, il faut multiplier la circonférence par la moitié du rayon.*

Car la perpendiculaire menée sur un des côtés, ne diffère pas du rayon, lorsque le nombre des côtés est infini.

146. Puisque les circonférences des cercles sont entr'elles comme les rayons ou comme les diamètres (131), il est visible que si l'on connoissoit la circonférence d'un cercle d'un diamètre connu, on seroit bientôt en état de déterminer la circonférence de tout autre cercle dont on connoîtroit le diamètre, puisqu'il ne s'agiroit que de calculer le quatrième terme de cette proportion; *le diamètre de la circonférence connue, est à cette même circonférence, comme le diamètre de la circonférence cherchée, est à cette seconde circonférence.*

On ne connoît point exactement le rapport du diamètre à la circonférence; mais on en a des valeurs assez approchées, pour qu'un rapport plus exact puisse être regardé comme absolument inutile dans la pratique.

Archimède a trouvé qu'un cercle qui auroit 7 pieds de diamètre, auroit 22 pieds de circonférence, à très-peu de chose près. Ainsi, si l'on demande quelle sera la circonférence d'un cercle qui auroit 20 pieds de diamètre, il faut chercher (*Arith.* 169) le quatrième terme de la proportion, dont les trois premiers sont

$$7 : 22 :: 20 :$$

Ce quatrième terme qui est $62 \frac{6}{7}$, est à très-peu de chose près, la longueur de la circonférence d'un cercle de 20 pieds de diamètre. Je dis à très-peu de chose près; car il faudroit que le cercle n'eût pas moins de 800 pieds de diamètre, pour que la circonférence déterminée d'après le rapport de 7 à 22, fût fautive d'un pied. Au reste, en employant le rapport de 7 à 22, on peut se dis-

Digitized by Google

penser de faire la proportion ; il suffit de tripler le diamètre, et d'ajouter au produit la septième partie de ce même diamètre ; parce que 3 $\frac{1}{7}$ est le nombre de fois que 22 contient 7.

Adrien Métius a donné un rapport baeucoup plus approché ; c'est celui de 113 à 355. Ce rapport est tel, qu'il faudroit que le diamètre d'un cercle fût de 3000000 pieds au moins, pour qu'on fit, en se servant de ce rapport, une erreur d'un pied sur la circonférence (*). Enfin, si l'on veut avoir la circonférence, avec encore plus de précision, il n'y a qu'à employer le rapport de 1 à 3,14159265358979 32, qui passe de beaucoup les limites des besoins ordinaires, et dont on peut supprimer plus ou moins de chiffres sur la droite, selon qu'on a moins ou plus besoin d'exactitude. Comme ce rapport a pour premier terme l'unité, il est assez commode en ce que, pour trouver la circonférence d'un cercle proposé, l'opération se réduit à multiplier le nombre 3,1415926, par le diamètre de ce cercle.

Il est donc facile, actuellement, de trouver la surface d'un cercle proposé, du moins aussi exactement que peuvent l'exiger les besoins les plus étendus de la pratique.

Si l'on demande de combien de pieds quarrés est la surface d'un cercle qui auroit 20 pieds de diamètre ; je calcule sa circonférence comme ci-dessus ; et ayant trouvé qu'elle est de 62 pieds et $\frac{6}{7}$, je multiplie 62 $\frac{6}{7}$, par 5 qui est la moitié du rayon (145), et j'ai 314 $\frac{2}{7}$ pieds quarrés, pour la surface de ce cercle.

147. On appelle *secteur de cercle* la surface

(*) Pour retenir aisément ce rapport, il faut faire attention que les nombres qui le composent, se trouvent, en partageant en deux parties égales, les trois premiers nombres impairs 1, 3, 5, écrits deux fois de suite en cette manière 113355.

Digitized by Google

comprise entre deux rayons *IA*, *IB* (*fig.* 78), et l'arc *AVB*. Et on appelle *segment* la surface comprise entre l'arc *AVB* et sa corde *AB*.

Puisque le cercle peut être considéré comme un polygone régulier d'une infinité de côtés, un secteür de cercle peut donc être considéré comme une portion de polygone régulier, et sa furface comme composée d'une infinité de triangles qui ont tous leur sommet au centre, et pour hauteur le rayon. Donc, *pour avoir la surface d'un secteur de cercle*, il faut multiplier l'arc qui lui sert de base, par la moitié du rayon.

148. A l'égard du segment, il est évident que pour en avoir la surface, il faut retrancher la surface du triangle *IAB*, de celle du secteur *IAVB*.

149. Il est évident que, dans un même cercle, les longueurs des arcs sont proportionnelles à leurs nombres de degrés; que par conséquent, quand on connoît la longueur de la circonférence, on peut avoir celle d'un arc de tel nombre de degrés qu'on voudra, en faisant cette proportion; 360 *degrés sont au nombre de degrés de l'arc dont on cherche la longueur, comme la longueur de la circonférence, est à celle de ce même arc.*

150.

Digitized by Google

150. S'il s'agit de trouver la surface d'un secteur dont on connoît le nombre de degrés et le rayon ; on cherchera, par la proportion qu'on vient de donner, la longueur de l'arc qui est la base de ce secteur, et on la multipliera par la moitié du rayon. Par exemple, si l'on demande quelle est la surface du secteur de $32^d\ 40'$ dans un cercle qui a 20 pieds de diamètre, on trouvera, comme ci-dessus (146), que la circonférence est de $62\frac{6}{7}$ pieds ; cherchant le quatrième terme d'une proportion dont les trois premiers sont $360^d : 32^d\ 40' :: 62\frac{6}{7}$: ce quatrième terme qu'on trouvera de $5\frac{19}{27}$, sera la longueur de l'arc de $32^d\ 40'$, laquelle, étant multipliée par 5, moitié du rayon, donne $28\frac{14}{27}$ pour la surface du secteur de $32^d.\ 40'$.

Du Toisé des Surfaces.

151. Ce qu'on entend par *Toisé* des surfaces, c'est la méthode de faire les multiplications nécessaires pour évaluer les surfaces, lorsqu'on a mesuré les dimensions en toises et parties de toises.

Il y a deux manières d'évaluer les surfaces, en toises quarrées et parties de la toise quarrée.

Dans la première, on compte par toises quarrées, pieds quarrés, pouces quarrés, lignes quarrées, etc.

La toise quarrée contient 36 pieds quarrés, parce que c'est un rectangle qui a 6 pieds de long sur 6 pieds de large. Le pied quarré contient 144 pouces quarrés, parce que c'est un rectangle qui a 12 pouces de long sur 12 pouces de large. Par

une raison semblable, on voit que le pouce quarré vaut 144 lignes quarrées, etc.

Ainsi, pour évaluer une surface en toises quarrées et parties quarrées de la toise quarrée, il n'y a autre chose à faire qu'à réduire les deux dimensions qu'on doit multiplier, chacune à la plus petite espèce (en ligne, si la plus petite espèce est des lignes); et après avoir fait la multiplication, on réduira le produit en pouces quarrés, ensuite en pieds quarrés, et enfin en toises quarrées, en divisant successivement par 144, 144 et 36.

Par exemple, pour trouver la surface d'un rectangle qui auroit $2^{to.}\ 3^{pi.}\ 5^{po.}$ de long, et $0^{to.}\ 4^{pi.}\ 6^{po.}$ de large; j'opère comme il suit.

$2^{to.}\ 3^{pi.}\ 5^{po.}$ font. . . . . . $185^{po.}$

0. 4. 6. font. 54

740

925

dont le produit est. . . . . $9990^{\text{pouces quarrés.}}$

divisant par 144 . . . . 9990 { 144

1350 { $69^{\text{pieds quarrés.}}$

54

divisant 69 par 36 . . . . 69 | 36

33 | $1^{\text{toise quarrée.}}$

ainsi la surface est . . . $1^{TT.}$ $33^{PP.}$ $54^{pp.}$

152. Dans la seconde manière d'évaluer les surfaces, en toises quarrées et parties de la toise

quarrée, on conçoit la toise quarrée composée de six rectangles qui ont tous une toise de haut et un pied de base, et que pour cette raison, on nomme *Toises-pieds :* on subdivise chaque toise-pieds en 12 parties ou rectangles qui ont chacun une toise de haut et un pouce de base, et qu'on appelle *Toises-pouces :* on subdivise chacune de celles-ci en 12 parties qui ont chacun une toise de haut et une ligne de base, et qu'on appelle *Toises-lignes ;* en un mot, on se représente la toise divisée et subdivisée continuelllement en rectangles, qui ont constamment une toise de haut sur un pied, ou un pouce, ou une ligne, ou un point de base. Les subdivisions qui passent le point, se marquent comme les secondes, tierces, quartes, etc. pour les degrés, excepté qu'on en fait précéder la marque par un T signe de la toise.

Quand on aura donc à multiplier les parties de deux lignes, pour évaluer une surface; il faut concevoir que les toises du multiplicande sont des toises quarrées; les pieds, des toises-pieds; les pouces, des toises-pouces, et ainsi de suite; à l'égard du multiplicateur, il représentera toujours combien de fois on doit prendre le multiplicande.

Cette observation faite, il n'est plus question que d'exécuter les règles que nous avons données en Arithmétique, sous le nom de *Multiplication des Nombres complexes.*

EXEMPLE.

On demande la surface d'un rectangle qui a $52^{T.}\ 4^{P.}\ 5^{po.}$ de longueur, et $44^{to.}\ 4^{P.}\ 8^{po.}$ de largeur.

Je considérerai $52^{to.}\ 4^{P.}\ 5^{po.}$ comme $52^{TT.}\ 4^{TP.}\ 5^{Tpo.}$ et le multiplicateur $44^{to.}\ 4^{P.}\ 8^{po.}$ comme un nombre abstrait; et j'opérerai comme il suit.

	$52^{TT.}$	$4^{TP.}$	$5^{Tp.}$		
	$44^{T.}$	4^{P}	$8^{p.}$		
	$208^{TT.}$	$0^{TP.}$	$0^{Tp.}$	$0^{Tl.}$	$0^{Tpt.}$
	208				
Pour $3^{TP.}$	22.				
Pour $1^{TP.}$	7.	2.			
Pour $4^{Tp.}$	2.	2.	8.		
Pour $1^{Tp.}$	0.	3.	8.		
Pour $3^{P.}$	26.	2.	2.	6.	
Pour $1^{P.}$	8.	4.	8.	10.	
Pour $4^{P.}$	2.	5.	6.	11.	4.
Pour $4^{P.}$	2.	5.	6.	11.	4.
	$2361^{TT.}$	$2^{TP.}$	$5^{Tp.}$	$2^{Tl.}$	$8^{Tpt.}$

153. Quand on a ainsi évalué une surface, en toises-quarrées, toises-pieds, toises-pouces, etc. il est fort aisé d'en trouver la valeur en toises quarrées, pieds quarrés, pouces quarrés, etc. Il faut écrire alternativement les deux nombres 6 et $\frac{1}{2}$ sous les parties de la toise, à commencer des toises-pieds, comme on levoit ci-dessous; multiplier chaque partie, par le nombre inférieur qui lui répond, et porter les produits des deux nombres consécutifs 6 et $\frac{1}{2}$, dans une même colonne; lorsqu'en

Digitized by Google

multipliant par $\frac{1}{2}$ il restera 1, écrivez 72 sous ce multiplicateur $\frac{1}{2}$, pour commencer une seconde colonne.

Ainsi, pour réduire en toises quarrées, pieds quarrés, pouces quarrés, etc. les parties du produit que nous avons trouvé ci-dessus, j'écris :

$2361^{TT.}$	$2^{TP.}$	$5^{Tp.}$	$2^{Tl.}$	$8^{Tpt.}$
	6	$\frac{1}{2}$	6	$\frac{1}{2}$
$2361^{TT.}$	$12^{PP.}$	$72^{PP.}$		
	2	12		
		4		
$2361^{TT.}$	$14^{PP.}$	$88^{PP.}$		

Et je multiplie les toises-pieds par 6, parce que la toise-pied vaut 6 pieds quarrés, ayant 6 pieds de haut sur un pied de base. Je multiplie les toises-pouces par $\frac{1}{2}$, et je porte les deux entiers, que me donne cette multiplication, au rang des pieds quarrés, parce que la toise-pouce étant la 12^e. partie de la toise-pied, doit valoir la 12^e. partie de 6 pieds quarrés, c'est-à-dire, un demi-pied quarré; donc les 5 toises-pouces valent 2 pieds quarrés et demi; et comme le demi-pied quarré vaut 72 pouces, au lieu du demi, j'écris 72; ensuite pour réduire les toises-lignes, je les multiplie par 6, parce que la toise-ligne étant la 12^e. partie de la toise-pouce, doit valoir la 12^e. partie de 72 pouces quarrés; c'est-à-dire, 6 pouces quarrés; un raisonnement semblable prouve qu'on doit multiplier ensuite par $\frac{1}{2}$, puis par 6, etc. ainsi que nous venons de le dire.

154. Donc réciproquement, si l'on veut réduire en toises-pieds, toises-pouces, etc. des parties quarrées de la toise quarrée, l'opération se réduira

Digitized by Google

1°. à prendre le sixième du nombre des pieds quarrés ; ce qui donnera des toises-pieds. 2°. On doublera le reste, s'il y en a un, et on ajoutera une unité, si le nombre des pouces quarrés, est, ou excède 72 ; et l'on aura les toises-pouces. 3°. Ayant retranché 72, du nombre des pouces quarrés, lorsque ce nombre sera ou excédera 72, on multipliera le reste, par 6, et l'on aura les toises-lignes. 4°. On doublera le reste, et on y ajoutera une unité si le nombre des lignes quarrées excède 72, et on aura le nombre des toises-points. On voit par-là comment on doit continuer, pour avoir les parties suivantes lorsqu'il doit y en avoir.

Ainsi si l'on proposoit de réduire 52^{TT} 25^{PP} 87^{pp} 92^{ll}, en toises-pieds, toises-pouces, etc. je diviserois 25 par 6, et j'aurois 4^{TP}, et 1 de reste ; je double cet 1, et j'y ajoute 1, parce que le nombre des pouces quarrés excède 72 ; j'ai donc 3^{Tp}. Je retranche 72 de 87, et je divise le reste 15, par 6 ; j'ai 2^{Tl}, et 3 de reste. Je double ce reste, et j'y ajoute une unité, parce que le nombre des lignes quarrées excède 72 ; j'ai 7^{Tpts}. Je retranche 72 de 92, et je divise le reste 20, par 6 ; j'ai $3^{T'}$, et 2 de reste ; je double ce reste, et j'ai $4^{T''}$; en sorte que j'ai en total, 52^{TT} 4^{TP} 3^{Tp} 2^{Tl} 7^{Tpts} $3^{T'}$ $4^{T''}$.

155. Puisque, pour avoir la surface d'un parallélogramme, il faut multiplier le nombre des parties de la base, par le nombre des parties de la

Digitized by Google

hauteur ; il s'ensuit (*Arith.* 67) que si connoissant la surface et le nombre des parties de la hauteur ou de la base, on veut avoir la base ou la hauteur, il faudra diviser le nombre qui exprime la surface, par le nombre qui exprime celle des deux dimensions qui sera connue. Mais il faut bien observer que ce n'est point une surface que l'on divise alors par une ligne ; la division d'une surface par une ligne, n'est pas moins chimérique que la multiplication d'une ligne, par une ligne. Ce que l'on fait véritablement alors, on divise une surface par une surface.

En effet, selon ce que nous avons dit (139) lorsqu'on évalue la surface du rectangle *ABCD* (*fig.* 91), on répète la surface du rectangle *ED* de même base, et qui a pour hauteur, l'unité ou la mesure principale *AE*, on rèpete, dis-je, cette surface autant de fois que sa hauteur *AE* est comprise dans la hauteur *AB* ; ainsi quand on veut connoître le nombre des parties de *AB*, ou le nombre des unités *AE* qu'il contient, il faut chercher combien de fois la surface *ABCD* contient celle du rectangle *ED*. Donc si la surface *ABCD* étant exprimée par $361^{TT} 2^{TP} 5^{Tp} 2^{Tl} 8^{Tpt}$, la base *AD* est de $4^{T} 3^{P} 6^{p}$; pour avoir la hauteur *AB*. Il faut concevoir que l'on a $361^{TT} 2^{TP}$, etc. à diviser, non par $4^{T} 3^{P} 6^{p}$, mais par $4^{TT} 3^{TP} 6^{Tp}$; et comme la toise est alors facteur commun du dividende et du diviseur, il est évident que le quotient sera le même que si l'un et l'autre exprimoient des toises et parties de toises linéaires ; donc l'opération se réduit à diviser $361^{T} 2^{P}$, etc. par $4^{T} 3^{P}$, etc. C'est-à-dire, que l'on considérera le dividende

et le diviseur, comme exprimant des toises linéaires, et par conséquent comme étant de même espèce ; et comme l'état de la question fait voir que le quotient doit aussi être de cette même espèce, c'est-à-dire, exprimer des toises et parties de toises linéaires, il s'ensuit que la division doit se faire alors précisément selon la règle donnée (*Arith.* 120 *et* 122).

Si la surface étoit donnée en toises quarrées et parties quarrées de la toise quarrée ; alors, pour plus de simplicité, on réduiroit ces parties en toises-pieds, toises-pouces, etc. par ce qui vient d'être dit (154) ; après quoi on opéreroit comme dans le cas précédent. Par exemple, si l'on demande le hauteur d'un parallélogramme ou d'un rectangle qui auroit $2^{T}\ 5^{P}$ de base, et $120^{TT}\ 29^{PP}\ 54^{pp}$ de surface. On réduira (154) cette surface à $120^{TT}\ 4^{TP}\ 10^{Tp}\ 9^{Tl}$; et la question, d'après ce qui précède, sera réduite à diviser $120^{T}\ 4^{P}\ 10^{p}\ 9^{l}$, par $2^{T}\ 5^{P}$, ce qui en suivant la règle donnée (*Arith.* 120 *et* 122) donne $42^{T}\ 3^{P}\ 10^{p}\ 1^{l}\ \frac{13}{17}$.

De la comparaison des Surfaces.

156. *Les surfaces des parallélogrammes sont entre elles, en général, comme les produits des bases par les hauteurs.*

C'est-à-dire, que la surface d'un parallélogramme, contient celle d'un autre parallélogramme, autant que le produit de la base du premier par sa hauteur, contient le produit de la base du second par sa hauteur.

Digitized by Google

Cela est évident, puisque tout parallélogramme est égal au produit de sa base par sa hauteur.

De-là il est aisé de conclure que *lorsque deux parallélogrammes ont même hauteur, ils sont entr'eux comme leurs bases;* et que *lorsqu'ils ont même base, ils sont entr'eux comme leurs hauteurs.* Car le rapport des produits ne changera point si l'on omet, dans chacun, le facteur qui leur est commun (*Arith.* 160).

157. Selon ce qui a été dit (145), la surface du cercle est égale à celle d'un triangle qui auroit pour hauteur le rayon, et pour base la circonférence; et par conséquent égale à un rectangle qui auroit pour hauteur le rayon et pour base la demi-circonférence. Donc si l'on compare ce rectangle au quarré du rayon qui est un rectangle de même hauteur, on verra évidemment (156) que le *quarré du rayon est à la surface du cercle, comme le rayon est à la demi-circonférence.* Ainsi pour avoir la surface d'un cercle, il suffit de multiplier le quarré de son rayon, par le rapport de la demi-circonférence au rayon, ou de la circonférence au diamètre.

Ainsi dans l'exemple donné (146), je multiplie 100 quarré du rayon 10, par $\frac{22}{7}$, ce qui me donne $\frac{2200}{7}$ ou $314\frac{2}{7}$ pieds quarrés pour la surface du cercle qui a 20 pieds de diamètre.

158. Puisque les triangles sont (134) moitié de parallélogrammes de même base et de même hauteur, il faut donc conclure que *les triangles de même hauteur sont entr'eux comme leurs bases; et les triangles de même base, sont entr'eux comme leurs hauteurs.*

159. *Les surfaces des parallélogrammes ou des triangles semblables, sont entr'elles comme les quarrés de leurs côtés homologues.*

Car les surfaces des deux parallélogrammes *ABCD* et *abcd* (*fig.* 92), sont entr'elles (156) comme les produits des bases par leurs hauteurs; c'est-à-dire, que $ABCD : abcd :: BC \times AE : bc \times ae$. Mais les parallélogrammes *ABCD*, *abcd* étant semblables, les triangles *AEB*, *aeb*, seront semblables, parcequ'outre l'angle droit en *E* et en *e*, ils doivent avoir de plus l'angle *B* égal à l'angle *b*; on aura donc (109) $AE : ae :: AB : ab$.

D'ailleurs à cause des parallélogrammes semblables, on a $BC : bc :: AB : ab$.

Multipliant ces deux proportions (*Arith.* 180) on aura $BC \times AE : bc \times ae :: \overline{AB}^2 : \overline{ab}^2$; donc $ABCD : abcd :: \overline{AB}^2 : \overline{ab}^2$.

160. A l'égard des triangles semblables, il est évident qu'ils ont la même propriété, puisqu'ils

sont moitiés de parallélogrammes de même base et de même hauteur.

161. En général, *les surfaces de deux figures semblables quelconques, sont entr'elles comme les quarrés des côtés, ou des lignes homologues de ces figures.*

Car les surfaces de deux figures semblables peuvent toujours être regardées comme composées d'un même nombre de triangles semblables chacun à chacun; alors la surface de chaque triangle de la première figure, sera à celle du triangle correspondant dans la seconde, comme le quarré d'un côté du premier, est au quarré du côté homologue du second (169); donc, puisque tous les côtés homologues étant en même rapport, leurs quarrés doivent être aussi tous en même rapport (*Arith.* 181), chaque triangle du premier polygone sera au triangle correspondant du second, comme le quarré d'un côté quelconque du premier polygone, est au quarré du côté homologue du second; donc (*Arith.* 176) la somme de tous les triangles du premier, sera à la somme de tous les triangles du second, ou la surface du premier, à la surface du second, aussi dans ce même rapport.

162. *Les surfaces des cercles sont donc entr'elles comme les quarrés de leurs rayons ou de leurs diamètres.*

Car les cercles sont des figures semblables (131),

dont les rayons et les diamètres sont des lignes homologues.

On doit dire la même chose des secteurs et des segmens de même nombre de degrés.

On voit donc qu'il n'en est pas des surfaces des figures semblables, comme de leurs contours; les contours suivent le rapport simple des côtés (129); c'est-à-dire, que de deux figures semblables, si un côté de l'une est double, ou triple, ou quadruple, etc. d'un côté homologue de l'autre, le contour de la première sera aussi double, ou triple, ou quadruple du contour de la seconde; mais il n'en est pas ainsi des surfaces; celle de la première figure seroit alors 4 fois, 9 fois, 16 fois, etc. aussi grande que celle de la seconde.

163. Si l'on vouloit donc construire une figure semblable à une autre, et dont la surface fût à celle de celle-ci, dans un rapport donné, par exemple, dans le rapport de 2 à 3; il ne faudroit pas faire les côtés homologues, dans le rapport de 2 à 3, car alors les surfaces seroient comme 9 à 4; mais il faudroit faire ces côtés, de telle grandeur que leurs quarrés fussent entre eux :: 2 : 3; c'est-à-dire, en supposant qu'un côté de la figure donnée soit de 50^p, par exemple, il faudroit, pour trouver le côté homologue de la figure cherchée x, calculer le quatrième terme d'une proportion, dont les trois premiers seroient $3 : 2 :: \overline{50}^2$ ou 50×50 est à un quatrième terme; ce quatrième terme qui est $1666 \frac{2}{3}$ seroit le quarré du côté cherché; c'est pourquoi, tirant la ra-

Digitized by Google

cine quarrée (*Arith.* 137) de 1666 $\frac{2}{3}$, on trouveroit $40^p,824$, c'est-à-dire, $40^p\ 9^p\ 10^l$ à-peu-près, pour ce côté cherché. Quand on a un côté de la figure, il est aisé de construire cette figure, selon ce qui a été dit (128).

La même méthode peut être employée à *déterminer le rayon d'un cercle qui auroit une surface proposée.*

On prendra arbitrairement un nombre que l'on considérera comme le rayon d'un cercle, dont on calculera la surface par ce qui a été dit (145). Puis on fera cette proportion. *La surface calculée est à la surface donnée, comme le quarré du rayon connu de la première, est au quarré du rayon inconnu de la seconde.*

On peut aussi trouver ce rayon, par la proposition donnée (157).

164. *Si sur les trois côtés* AB, BC, AC *d'un triangle rectangle* ABC, (fig. 93), *on construit trois quarrés* BEFA, BGHC, AILC; *celui qui occupera l'hypothénuse, vaut toujours la somme des deux autres.*

Abaissons de l'angle droit B, sur l'hypothénuse AC, la perpendiculaire BD; les deux triangles BDA, BDC seront chacun semblables au triangle ABC (112); et par conséquent les surfaces de ces trois triangles seront entr'elles comme les quarrés de leurs côtés homologues; on a donc cette suite de rapports égaux $ABD : \overline{AB}^2 :: BDC : \overline{BC}^2 :: ABC : \overline{AC}^2$ ou $ABD : ABEF :: BDC : BGHC :: ABC : AILC$; donc (*Arith.* 176) $ABD + BDC : ABEF + BGHC ::$

ABC : *AILC*. Or il est évident que *ABC* vaut les deux parties *ABD* + *BDC*; donc *AILC* vaut *ABEF* + *BGHC*, ce qu'on peut encore exprimer en cette matière $\overline{AC}^2$ vaut $\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2$.

165. Puisque le quarré de l'hypothénuse vaut la somme des quarrés des deux côtés de l'angle droit, concluons donc que *le quarré d'un des côtés de l'angle droit, vaut le quarré de l'hypothénuse, moins le quarré de l'autre côté;* c'est-à-dire, que $\overline{BC}^2$ *vaut* $\overline{AC}^2 - \overline{AB}^2$, *et* $\overline{AB}^2$ *vaut* $\overline{AC}^2 - \overline{BC}^2$.

166. Donc, *lorsqu'on connoît deux côtés d'un triangle rectangle, on peut toujours calculer le troisième.*

Supposons, par exemple, qu'on demande la longueur du talud intérieur d'un rempart qui auroit 18 pieds de base, et 12 pieds de hauteur.

J'ajoute le quarré de 18.	324.
Avec le quarré de 12.	144.
La somme.	468.

Est le quarré de la longueur du talud, dont la racine 21,6 sera la longueur demandée.

Supposons pour second exemple, que *A* (*fig.* 94) soit un fourneau de mine, auquel on communique par la galerie *DB*, et le rameau *BA* de 9 pieds. L'effet de la poudre étant supposé pouvoir s'étendre en tous sens, à une distance de

25 pieds, il faut trouver quelle partie *BC*, de la galerie, on doit bourrer pour que la galerie résiste autant que le reste du terrein.

Il est clair qu'on doit bourrer jusqu'à une distance *BC* telle que *AC* soit de 25 pieds; *BC* est un côté de l'angle droit du triangle rectangle *ABC*; on l'aura donc comme il suit :

Du quarré de 25	625.
Je retranche celui de 9	81.
Le reste	544.

Est le quarré de *BC*; et sa racine 23,3 est la longueur que doit avoir *BC*.

167. On peut faire usage de la propriété du quarré de l'hypothénuse, pour élever facilement une perpendiculaire sur une ligne droite, en un point donné.

Par exemple, sur le prolongement *EA* de la face d'un bastion (*fig.* 95) on veut établir perpendiculairement une batterie au point *A*. On formera, avec un cordeau, un triangle rectangle *ABC*, en prenant *AB* de 3 toises, par exemple, et faisant *AC* de 4 toises, et *BC* de 5 toises; ce qui est facile. Alors *AC* sera perpendiculaire sur *BA*; car le quarré de 5 vaut le quarré de 4, plus le quarré de 3.

168. Puisque le quarré de l'hypothénuse vaut la somme des quarrés des deux côtés de l'angle droit, il s'ensuit que si le triangle rectangle est isoscèle, comme il arrive, par exemple, dans un quarré lorsqu'on tire la diagonale *AC*, (*fig.* 96), alors le quarré de l'hypothénuse sera double du quarré d'un de ses côtés : donc la surface d'un quarré est à celle du quarré fait sur sa diagonale, comme 1 est à 2;

Digitized by Google

donc (*Arithm.* 182) le côté d'un quarré est à sa diagonale, comme 1 est à la racine quarrée de 2; et comme cette racine ne peut être exprimée exactement en nombres, il s'ensuit qu'on ne peut avoir exactement en nombres le rapport du côté d'un quarré à sa diagonale, c'est-à-dire, que la diagonale est *incommensurable*, ou n'a aucune commune mesure avec son côté.

169. La propriété des trois côtés d'un triangle rectangle enseignée (164), n'est pas particulière aux quarrés formés sur ces côtés; en général, *si sur les trois côtés d'un triangle rectangle quelconque, on forme trois figures semblables quelconques, par exemple, trois triangles, trois cercles, etc. la figure formée sur l'hypothénuse vaudra la somme des figures semblables, formées sur les deux autres côtés.*

Cela se démontre absolument de même que pour les quarrés, en partant de ce principe (161), que les surfaces des figures semblables sont entr'elles comme les quarrés de leurs côtés homologues.

170. Donc aussi la surface d'une figure quelconque, formée sur un des côtés de l'angle droit, est égale à la différence des deux figures semblables, formées sur l'hypothénuse et sur l'autre côté de l'angle droit.

171. Dans la démonstration du n°. 164, on a vu que la similitude des triangles *ABC*, *ADB*,

CDB

Digitized by Google

CDB, (*fig.* 93) donne $ABC : \overline{AC}^2 :: ADB : \overline{AB}^2 :: BDC : \overline{BC}^2$, ou bien $ABC : ADB : BDC :: \overline{AC}^2 : \overline{AB}^2 : \overline{BC}^2$; mais les triangles *ABC*, *ADB*, *BDC* étant tous trois de même hauteur, sont entr'eux comme leurs bases (158); donc $ABC : ADB : BDC :: AC : AD : DC$; donc aussi $\overline{AC}^2 : \overline{AB}^2 : \overline{BC}^2 :: AC : AD : DC$; donc *le quarré fait sur l'hypothénuse, est à chacun des quarrés faits sur les deux autres côtés, comme l'hypothénuse est à chacun des segmens correspondans à ces côtés.*

172. De-là on peut conclure le moyen de faire, par lignes, ce que nous avons enseigné à faire par nombres (163); c'est-à-dire, de construire une figure semblable à une figure proposée, et dont la surface soit à celle de celle-ci, dans un rapport donné.

On tirera (*figure* 97) une ligne indéfinie *DE* sur laquelle on prendra les deux parties *DP* et *PE* telles que *DP* soit à *PE*, comme la surface de la figure donnée doit être à celle de la figure cherchée; c'est-à-dire, :: 3 : 2, si l'on veut que celle-ci soit les $\frac{2}{3}$ de l'autre. Sur *DE* comme diamètre, on décrira le demi-cercle *DBE*; et ayant élevé au point *P* la perpendiculaire *PB*, on mènera du point *B*, où elle rencontre la circonférence, aux deux extrémités *D* et *E*, les cordes *DB*, *BE*. Sur *DB* on prendra *BA* égal à un côté *AB* de la figure donnée, et ayant mené *AC* parallèle à *DE*, on aura *BC* pour le côté homologue de la figure cherchée, qu'on construira ensuite comme il a été dit (128); en voici la raison,

Digitized by Google

la surface de la figure donnée, doit être à celle de la figure cherchée, comme le quarré du côté AB, est au quarré du côté cherché, que j'appelle x; c'est-à-dire $:: \overline{AB}^2 : \overline{x}^2$; or on veut que ces deux surfaces soient aussi l'une à l'autre $:: 3 : 2$; il faut donc que $\overline{AB}^2 : \overline{x}^2 :: 3 : 2$; or $AB : BC :: BD : BE$, et par conséquent (*Arith.* 181) $\overline{AB}^2 : \overline{BC}^2 :: \overline{BD}^2 : \overline{BE}^2$; mais comme le triangle DBE est rectangle, on a (171) $\overline{BD}^2 : \overline{BE}^2 :: DP : PE$; c'est-à-dire $:: 3 : 2$; donc $\overline{AB}^2 : \overline{BC}^2 :: 3 : 2$; donc aussi $\overline{AB}^2 : \overline{BC}^2 :: \overline{AB}^2 : \overline{x}^2$; donc x doit être égal à BC.

173. Il suit encore de ce qu'on vient de dire (171), que *les quarrés des cordes* AC, AD, *etc. menées par l'extrémité d'un diamètre* AB (fig. 98), *sont entr'eux comme les parties* AP, AO *que coupent, sur ce diamètre, les perpendiculaires abaissées des extrémités de ces cordes.*

Car en tirant les cordes BC et BD, on aura (171) dans le triangle rectangle ACB,

$$\overline{AB}^2 : \overline{AC}^2 :: AB : AP,$$

et dans le triangle rectangle ADB,

$$\overline{AD}^2 : \overline{AB}^2 :: AO : AB$$

donc $$\overline{AD}^2 : \overline{AC}^2 :: AO : AP.$$

Des Plans.

174. Après avoir établi la mesure et les rapports des surfaces planes, il ne nous reste plus, pour pouvoir passer aux solides, qu'à considérer les propriétés des lignes droites dans leurs différentes positions à l'égard des plans, et celles des plans dans leurs différentes positions les uns à l'égard des autres; c'est ce dont nous allons nous occuper actuellement.

Nous ne supposons aux plans dont il va être question, aucune grandeur ni aucune figure déterminée; nous les supposons étendus indéfiniment dans tous les sens; ce n'est que pour aider l'imagination que nous leur donnons les figures par lesquelles nous les représentons ici.

175. *Une ligne droite ne peut être en partie dans un plan, et en partie élevée ou abaissée à son égard.*

Car le plan (5) est une surface à laquelle une ligne droite s'applique exactement.

176. *Il en est de même d'un plan à l'égard d'un autre plan.*

Car une ligne droite qu'on tireroit dans la partie plane commune à ces deux plans, pouvant être prolongée indéfiniment dans l'un et dans l'autre, se trouveroit en partie dans l'un de ces plans, et

en partie élevée ou abaissée à son égard, ce qui ne peut être (175).

177. *Deux lignes* AB, CD (fig. 99), *qui se coupent, sont dans un même plan.*

Car il est évident qu'on peut faire passer un plan par l'une *AB* de ces lignes, et par un point pris arbitrairement dans la seconde; et comme le point d'intersection *E*, en tant qu'appartenant à *AB*, est dans ce même plan, la ligne *CD* a donc deux points dans ce plan; elle y est donc toute entière.

178. *La rencontre ou l'intersection de deux plans ne peut être qu'une ligne droite.*

Il est évident qu'elle doit être une ligne, puisqu'aucun des deux plans n'a d'épaisseur; de plus elle doit être une ligne droite, car une ligne droite qu'on tireroit par deux points de cette intersection, est nécessairement toute entière dans chacun des deux plans; elle est donc l'intersection même.

On peut donc faire passer par une même ligne droite, une infinité de plans différens.

179. Nous disons qu'*une ligne est perpendiculaire à un plan*, quand elle ne penche d'aucun côté de ce plan.

180. *Une perpendiculaire* AB *à un plan* GE

Digitized by Google

(fig. 100), *est donc perpendiculaire à toutes les lignes* BC, BC, BC, etc. *qu'on peut mener par son pied, dans ce plan;* car si il y en avoit une à laquelle elle ne fût pas perpendiculaire, elle inclineroit vers cette ligne, et par conséquent vers le plan.

181. *La ligne* AB (fig. 101) *étant perpendiculaire au plan* GE, *si par son pied* B *on tire une ligne* BC *dans le plan* GE, *et qu'on conçoive que le plan* ABC *tourne autour de* AB; *je dis que, dans ce mouvement, la ligne* BC *ne sortira point du plan* GE.

Imaginons le plan *ABC* arrivé dans une position quelconque *ABD;* si la ligne *BC* qui alors est en *BD*, n'étoit point dans le plan *GE*, le plan *ABD* rencontreroit donc le plan *GE* dans une ligne droite *BF*, à laquelle *AB* seroit perpendiculaire (180); *BF* seroit donc aussi perpendiculaire sur *AB;* et comme *BD* est supposée perpendiculaire sur *AB*, au même point *B*, il s'ensuivroit donc, qu'au même point *B* et dans un même plan *ABD*, on pourroit élever deux perpendiculaires à *AB*, ce qui (25) est impossible; donc *BF* ne peut être différente de *BD*; donc *BC* ne peut, dans son mouvement autour de *AB*, sortir du plan *GE*.

182. Donc, *pour qu'une ligne droite* AB (fig. 101)

soit perpendiculaire à un plan GE, *il suffit qu'elle soit perpendiculaire à deux lignes* BC, BD *qui se rencontrent à son pied dans ce plan.*

Car si l'on conçoit que le plan de l'angle droit *ABC*, tourne autour de *AB*, la ligne *BC* tracera (181) un plan auquel *AB* sera perpendiculaire; or je dis que ce plan ne peut être autre que le plan *GE* des deux lignes *BC* et *BD*; car l'angle *ABD* étant droit, ainsi que l'angle *ABC*, la ligne *BC*, en tournant autour de *AB*, aura nécessairement la ligne *BD* pour une de ses positions; donc *BD* est dans le plan tracé par *BC*; donc *AB* est perpendiculaire au plan *CBD*.

183. *Si d'un point* A *d'une droite* AI *oblique à un plan* GE (fig. 102) *on abaisse une perpendiculaire* AB *sur ce plan, et qu'ayant joint les points* B *et* I *de la perpendiculaire et de l'oblique, par une droite* BI, *on mène à cette dernière, une perpendiculaire* CD *dans le plan* GE; *je dis que* AI *sera aussi perpendiculaire à* CD.

Prenons, à commencer du point *I*, les parties égales *IC*, *ID*, et tirons les lignes *BC* et *BD*; ces deux dernières lignes seront égales entr'elles (27); donc les deux triangles *ABC*, *ABD* seront égaux; car outre l'angle *ABC* égal à l'angle *ABD*, comme étant chacun droit, le côté *AB* est commun, et *BC* est égal à *BD* selon ce qu'on vient de prouver;

Digitized by Google

ils ont donc un angle égal compris entre côtés égaux chacun à chacun, ils sont donc égaux; donc *AD* est égal à *AC*; la ligne *AI* a donc deux points *A* et *I* également éloignés du point *C* et du point *D*; elle est donc perpendiculaire sur *CD* (30).

184. *Un plan* est dit *perpendiculaire à un autre plan*, quand il ne penche ni d'un côté, ni de l'autre, de ce dernier.

185. Donc, *par une même ligne* CD (fig. 103) *prise dans un plan* GE, *on ne peut conduire plus d'un plan perpendiculaire à ce plan* GE.

186. *Un plan* CK *est perpendiculaire à un autre plan* GE, *quand il passe par une droite* AB *perpendiculaire à celui-ci*; car il est évident qu'il ne peut incliner d'aucun côté du plan *GE*.

187. *Si par un point* A *pris dans le plan* CK *perpendiculaire au plan* GE, *on mène une perpendiculaire* AB *à la commune section* CD, *cette ligne sera aussi perpendiculaire au plan* GE.

Car si elle ne l'étoit pas, on pourroit par le point *B* où elle tombe, élever une perpendiculaire au plan *GE*, et conduire par cette perpendiculaire et par la commune section *CD*, un plan qui (186) seroit perpendiculaire au plan *GE*; on pourroit

donc, par une même ligne *CD*, prise dans le plan *GE*, mener deux plans perpendiculaires à celui-ci ; ce qui est impossible (185); donc *AB* est perpendiculaire au plan *GE*.

188. Donc *le plan* CK *étant perpendiculaire au plan* GE, *la perpendiculaire* BA *qu'on élevera sur le plan* GE, *par un point B de la section commune, sera nécessairement dans le plan* CK.

De cette proposition, il suit que *deux perpendiculaires* BA, LM *à un même plan* GE, *sont parallèles.*

Car si l'on joint leurs pieds *B* et *L* par une ligne *BL*, et que par cette ligne et par *AB* on conduise un plan *CK*, ce plan sera perpendiculaire au plan *GE* (186); et puisque *LM* est alors une perpendiculaire au plan *GE*, menée par un point *L* du plan *CK*, elle sera donc dans le plan *CK* (188); or puisque les deux lignes *AB*, *LM* sont toutes deux dans un même plan et perpendiculaires à la même ligne *BL*, elles sont parallèles (36 et 37).

189. Donc *si deux droites* AB, CD (fig. 105) *sont parallèles chacune à une troisième* HF, *elles seront aussi parallèles entr'elles;* car les lignes *AB*, *HF* étant parallèles, peuvent être toutes deux perpendiculaires à un même plan *GE*; par la même

raison, *CD* et *EF*, peuvent être perpendiculaires au même plan *GE*; donc *AB* et *CD* étant perpendiculaires à un même plan, seront parallèles.

190. *Si deux plans* CK, NL (fig. 104) *sont perpendiculaires à un troisième* GE, *leur commune section* AB *sera aussi perpendiculaire au plan* GE.

Car la perpendiculaire qu'on éleveroit par le point *B* sur le plan *GE*, doit être dans chacun de ces deux plans (188); elle ne peut donc être autre que l'intersection commune.

191. On appelle *angle-plan*, l'ouverture de deux plans *GF*, *GE* (*fig.* 106) qui se rencontrent; cet angle s'appelle aussi l'*inclinaison* de l'un de ces plans à l'égard de l'autre.

L'angle-plan formé par les deux plans *GF*, *GE*, n'est autre chose que la quantité dont le plan *GF* auroit dû tourner autour de *AG* pour venir dans sa situation actuelle, s'il avoit été d'abord couché sur le plan *GE*.

De-là il est aisé de voir que si par un point *B* pris dans la commune section *AG*, on mène dans le plan *GE* la perpendiculaire *BD* à *AG*, et dans le plan *GF* la perpendiculaire *BC* à la même ligne *AG*, l'angle formé par les deux plans, est la même chose que l'angle formé par les deux lignes *BD* et *BC*; car il est facile de voir que pendant le

mouvement du plan *GF*, la ligne *BC* s'écarte de la ligne *BD* sur laquelle elle étoit couchée au commencement du mouvement, s'écarte, dis-je, de *BD*, précisément selon la même loi selon laquelle le plan *GF* s'écarte du plan *GE*.

192. Donc *un angle-plan a même mesure que l'angle rectiligne compris entre deux lignes tirées, dans chacun des deux plans qui le forment, perpendiculairement à la commune section, et d'un même point de cette ligne.*

De-là il est si aisé de conclure les propositions suivantes, que nous nous contenterons de les énoncer.

193. *Un plan qui tombe sur un autre plan, forme deux angles, qui pris ensemble, valent* 180 *degrés.*

194. *Les angles formés par tant de plans qu'on voudra, qui passent tous par une même droite, valent* 360 *degrés.*

195. *Deux plans qui se coupent, font les angles opposés au sommet, égaux.*

196. On appelle *plans parallèles*, ceux qui ne peuvent jamais se rencontrer, à quelque distance qu'on les imagine prolongés.

Les plans parallèles sont donc par-tout également éloignés.

Digitized by Google

197. *Si deux plans parallèles sont coupés par un troisième plan* (fig. 107), *les intersections* AB, CD *seront deux droites parallèles ;* car comme elles sont dans un même plan *ABCD*, elles ne pourroient manquer de se rencontrer si elles n'étoient pas parallèles, et alors il est évident que les plans se rencontreroient aussi.

198. *Deux plans parallèles, coupés par un troisième, ont les mêmes propriétés, dans les angles qu'ils forment avec ce troisième, que deux lignes droites parallèles, à l'égard d'une troisième droite qui les coupe.* C'est une suite de ce qui a été dit (192).

Propriétés des lignes droites coupées par des Plans parallèles.

199. *Si d'un point* I *pris hors d'un plan* GE (fig. 108), *on tire à différens points* K, L, M *de ce plan, des droites* IK, IL, IM, *et qu'on coupe ces droites par un plan* ge *parallèle au plan* GE; *je dis* 1°. *que ces droites seront coupées proportionnellement ;* 2°. *que la figure* klm *sera semblable à la figure* KLM.

Ne supposons d'abord que trois points *K*, *L*, *M*. Puisque les droites *kl*, *lm*, *mk* sont les intersections des plans *IKL*, *ILM*, *IKM* avec le plan *ge*,

elles sont parallèles aux droites *KL*, *LM*, *MK*, intersections des mêmes plans avec le plan *GE* (197) : donc les triangles *IKL*, *ILM*, *IMK*, sont semblables aux triangles *Ikl*, *Ilm*, *Imk*, chacun à chacun; donç *IK* : *Ik* :: *KL* : *kl* :: *IL* : *Il* :: *LM* : *lm* :: *IM* : *Im* :: *MK* : *mk*; or, 1°. si de cette suite de rapports égaux on tire seulement ceux qui renferment les droites qui partent du point *I*, on aura *IK* : *Ik* :: *IL* : *Il* :: *IM* : *Im*; donc les droites *IK*, *IL*, *IM*, sont coupées proportionnellement.

2°. Si de la même première suite de rapports égaux, on tire ceux qui renferment les lignes comprises dans les deux plans parallèles, on aura *KL* : *kl* :: *LM* : *lm* :: *KM* : *km*; donc les deux triangles *KLM*, *klm* sont semblables, puisqu'ils ont les côtés proportionnels.

Supposons maintenant, tel nombre de points *ABCDF*, *etc.* qu'on voudra, on démontrera précisément de la même manière, que les droites *IA*, *IB*, *IC*, *etc.* sont coupées proportionnellement; et si l'on imagine des diagonales *AC*, *AD*, etc. *ac*, *ad*, etc. menées des deux angles correspondans *A* et *a*, on démontrera, aussi de la même manière, que les triangles *ABC*, *ACD*, etc. sont semblables aux triangles *abc*, *acd*, etc. chacun à chacun; donc les deux polygones *ABCDF*, *acbdf*, étant composés d'un même nombre de

Digitized by Google

triangles semblables chacun à chacun, et semblablement disposés, sont semblables (128).

200. Puisque les deux figures *KLM*, *klm* sont semblables, concluons-en que l'angle *KLM* est égal à l'angle *klm*, et par conséquent, *si deux droites* KL, LM *qui comprennent un angle* KLM, *sont parallèles à deux droites* kl, lm *qui comprennent un angle* klm, *l'angle* KLM *sera égal à l'angle* klm, *lors même que ces deux angles ne seront pas dans un même plan :* nous avons donné cette même proposition (43); mais nous supposions que les deux angles étoient dans un même plan.

201. Il suit encore, de ce que les deux figures *ABCDF* et *abcdf* sont semblables, et de ce que les deux figures *KLM*, *klm* sont semblables; il suit, dis-je, que *les surfaces des deux sections* abcdf, klm *sont entr'elles comme celles de deux figures* ABCDF, KLM.

Car $ABCDF : abcdf :: \overline{AB}^2 : \overline{ab}^2$ (161).

Mais les triangles semblables *IAB*, *Iab* donnent $AB : ab :: IA : Ia$.

Et par conséquent (*Arithm.* 181) $\overline{AB}^2 : \overline{ab}^2 :: \overline{IA}^2 : \overline{Ia}^2$ ou (199) $:: \overline{IM}^2 : \overline{Im}^2$, ou (à cause des triangles semblables *IML*, *Iml*) $:: \overline{LM}^2 : \overline{lm}^2$; et par conséquent (161)

:: *KLM* : *klm*; donc *ABCDF* : *abcdf* :: *KLM* : *klm*, ou (*Arith.* 171) *ABCDF* : *KLM* :: *abcdf* : *klm*.

202. Cette démonstration fait voir en même temps que les surfaces *ABCDF*, *abcdf* sont entr'elles comme les quarrés de deux droites *IA* et *Ia* tirées du point *I* à deux points correspondans de ces deux figures, et par conséquent (199) comme les quarrés des hauteurs ou perpendiculaires *IP*, *Ip* menées du point *I* sur les plans *GE* et *ge*.

Concluons donc 1°. que si les deux surfaces *ABCDF*, *KLM* étoient égales, les deux surfaces *abcdf*, *klm* seroient aussi égales.

2°. Que tout ce que nous venons de dire, auroit encore lieu si le point *I* au lieu d'être commun aux droites *IA*, *IB*, *IC*, etc. et aux droites *IM*, *IL*, etc. étoit différent pour chaque figure, pourvu qu'il fût à même hauteur au-dessus du plan *ge*.

Digitized by Google

TROISIÈME SECTION.

Des Solides.

203. Nous avons nommé *Solide* ou *Volume*, ou *Corps* (1), tout ce qui a les trois dimensions, *Longueur*, *Largeur* et *Profondeur*.

Nous allons nous occuper de la mesure et des rapports des solides.

Nous considérerons les solides terminés par des surfaces planes; et de ceux qui sont renfermés par des surfaces courbes, nous ne considérerons que le *cylindre*, le *cône* et la *sphère*.

Les solides terminés par des surfaces planes, se distinguent en général par le nombre et la figure des plans qui les renferment, ces plans doivent être, au moins, au nombre de quatre.

204. Un solide, dont deux faces opposées sont deux plans égaux et parallèles, et dont toutes les autres faces sont des parallélogrammes, s'appelle en général un *Prisme*. *Voyez fig.* 109, 110, 111, 112.

On peut donc regarder le prisme comme engendré par le mouvement d'un plan *BDF*, qui glisseroit parallèlement à lui-même le long d'une ligne droite *AB*, (fig. 109).

Digitized by Google

Les deux plans parallèles se nomment les *bases* du prisme, et la perpendiculaire *LM* menée d'un point de l'une de ces bases, sur l'autre base, se nomme la *hauteur*.

De l'idée que nous venons de donner du prisme, il suit, qu'à quelqu'endroit qu'on coupe un prisme, par un plan parallèle à sa base, la section sera toujours un plan parfaitement égal à la base.

Les lignes telles que *BA* qui sont les rencontres de deux parallélogrammes consécutifs, sont nommées les *arêtes* du prisme.

Le prisme est *droit*, lorsque ses arêtes sont perpendiculaires à la base ; alors elles sont toutes égales à la hauteur; *voyez fig.* 110 et 112.

Au contraire le prisme est *oblique* lorsque ses arêtes inclinent sur sa base.

Les prismes se distinguent par le nombre des côtés de leur base ; si la base est un triangle, le prisme est dit *prisme triangulaire*, (*fig.* 109) ; si la base est un quadrilatère, on l'appelle *prisme quadrangulaire* (*fig.* 110) ; et ainsi de suite.

Parmi les prismes quadrangulaires on distingue plus particulièrement le *parallélipipède* et le *cube*.

Le *parallélipipède* est un prisme quadrangulaire, dont les bases, et par conséquent toutes les faces, sont des parallélogrammes ; et lorsque le parallélogramme qui sert de base est un rectangle, et qu'en même

Digitized by Google

même temps le prisme est droit, on l'appelle *parallélipipède rectangle*, voyez *fig.* 110.

Le parallélipipède rectangle prend le nom de *cube*, lorsque la base est un quarré, et que l'arête *AB*, (*fig.* 112) est égale au côté de ce quarré.

Le cube est donc un solide compris sous six quarrés égaux; c'est avec ce solide qu'on mesure tous les autres, comme nous le verrons dans peu.

205. Le *cylindre* est le solide compris entre deux cercles égaux et parallèles, et la surface que traceroit une ligne *AB* (*fig.* 113 et 114), qui glisseroit parallèlement à elle-même le long des deux circonférences. Le cylindre est *droit* quand la ligne *CF* (*fig.* 113) qui joint les centres des deux bases opposées, est perpendiculaire à ces cercles; cette ligne *CF* s'appelle l'*axe* du cylindre; et le cylindre est oblique, quand cette même ligne *CF* incline sur la base.

On peut considérer le cylindre droit comme engendré par le mouvement du parallélogramme rectangle *FCDE* tournant autour de son côté *CF*.

206. La *pyramide* est un solide compris sous plusieurs plans, dont l'un, qu'on appelle la *base*, est un polygone quelconque, et les autres, qui sont tous des triangles, ont pour bases les côtés de ce polygone, et ont tous leurs sommets réunis

en un même point qu'on appelle le *sommet* de la pyramyde. *Voyez fig.* 115, 116, 117.

La perpendiculaire *AM*, menée du sommet sur le plan qui sert de base, s'appelle la *hauteur* de la pyramide.

Les pyramides se distinguent par le nombre des côtés de leurs bases, en sorte que celle qui a pour base un triangle, est appelée *pyramide triangulaire*; celle qui a pour base un quadrilatère, *pyramide quadrangulaire;* et ainsi de suite.

La pyramide est dite *régulière*, lorsque le polygone qui lui sert de base est régulier, et qu'en même-temps la perpendiculaire *AM* (*fig.* 117) menée du sommet, passe par le centre de ce polygone.

La perpendiculaire *AG*, menée du sommet *A* sur l'un *DE*, des côtés de la base, s'appelle *apothême.*

Il est clair que tous les triangles qui aboutissent au point *A*, sont égaux et isocèles; car ils ont tous des bases égales, et les arêtes *AB*, *AC*, *AD*, etc. sont toutes égales, puisque ce sont toutes des obliques également éloignées de la perpendiculaire *AM* (27).

Il n'est pas moins évident que tous les apothêmes sont égaux.

207. Le *cône*, (*fig.* 118 et 119) est le solide

Digitized by Google

renfermé par le plan circulaire *BGDH* qu'on appelle la *base* du cône, et par la surface que traceroit une ligne *AB* tournant autour du point fixe *A*, et rasant toujours la circonférence *BGDH*.

Le point *A* s'appelle le *sommet* du cône.

La perpendiculaire menée du sommet sur le plan de la base, se nomme la *hauteur* du cône; et le cône est *droit* ou *oblique*, selon que cette perpendiculaire passe (*fig* 118), ou ne passe point (*fig*. 119) par le centre de la base.

On peut concevoir le cône droit comme engendré par le mouvement du triangle rectangle *ACD*, (*fig*. 118) tournant autour du côté *AC*.

208. La *sphère* est un solide terminé, de toutes parts, par une surface dont tous les points sont également éloignés d'un même point.

On peut considérer la sphère comme le solide qu'engendreroit le demi-cercle *ABD*, (*fig*. 121) tournant autour du diamètre *AD*.

Il est évident que toute *coupe*, ou toute *section* de la sphère, par un plan, est un cercle. Si ce plan passe par le centre, la section s'appelle *grand cercle* de la sphère. Et on appelle, au contraire, *petit cercle*, toute section de la sphère, par un plan qui ne passe point par le centre.

Le *secteur sphérique* est le solide qu'engendreroit le secteur circulaire *BCA* tournant autour du

rayon AC. La surface que décriroit l'arc AB dans ce mouvement, s'appelle *calotte sphérique*.

Le *segment sphérique* est le solide qu'engendreroit le demi-segment circulaire AFB, tournant autour de la partie AF du rayon.

Des Solides semblables.

209. Les *solides semblables* sont ceux qui sont composés d'un même nombre de faces semblables chacune à chacune, et semblablement disposées dans les deux solides, *voyez fig.* 125.

210. *Les arêtes homologues et les sommets des angles solides homologues, sont donc des lignes et des points semblablement placés dans les deux solides;* car les arêtes homologues, et les sommets des angles solides homologues, sont des lignes et des points semblablement placés à l'égard des faces auxquelles ils appartiennent, puisque ces faces sont supposées semblables; or ces faces sont semblablement disposées dans les deux solides; donc, etc.

211. Donc *les triangles* ACD, acd, (fig. 125), *qui joignent un angle solide, et les extrémités d'une arête homologue, dans chaque solide, sont deux figures semblables, et semblablement disposées dans les deux solides;* car les extrémités des arêtes homologues CD et cd sont elles-mêmes les sommets

Digitized by Google

d'angles solides homologues, qui sont (210) semblablement placés à l'égard des solides.

212. *Les diagonales* AC, ac, AD, ad, etc. *qui joignent deux angles solides homologues, sont donc entr'elles comme les arêtes homologues* CD, cd *de ces solides;* car elles sont les côtés des triangles semblables dont on vient de parler, et qui ont pour un de leurs côtés des arêtes homologues.

213. Donc deux solides semblables peuvent être partagés en un même nombre de pyramides semblables chacune à chacune, par des plans conduits par deux angles homologues, et par deux arêtes homologues; car les faces de ces pyramides seront composées des triangles semblables, et semblablement disposés dans les deux solides (211); et les bases de ces mêmes pyramides seront aussi semblables, puisqu'elles sont des faces homologues des deux solides; donc (209) ces pyramides seront semblables.

214. *Si de deux angles homologues on abaisse des perpendiculaires sur deux faces homologues, ces perpendiculaires seront entr'elles dans le rapport de deux arêtes homologues quelconques.*

Car les deux angles homologues étant semblablement disposés à l'égard de deux faces homo-

logues (210), doivent nécessairement être à des distances de ces faces, qui soient entr'elles dans le rapport des dimensions homologues des deux solides.

De la mesure des Surfaces des Solides.

215. Les surfaces des prismes et des pyramides, étant composées de parallélogrammes, de triangles et de polygones rectilignes, nous pourrions nous dispenser de rien dire ici sur la manière dont on doit s'y prendre pour les mesurer, puisque nous avons donné (139, 141 et 143) les moyens de mesurer les parties dont elles sont composées. Mais on peut tirer de ce que nous avons dit à ce sujet, quelques conséquences, qui non-seulement serviront à simplifier les opérations qu'exigent ces mesures, mais nous seront encore utiles pour évaluer les surfaces des cylindres, des cônes, et même de la sphère.

216. *La surface d'un prisme quelconque (en n'y comprenant point les deux bases) est égale au produit de l'une des arêtes de ce prisme, par le contour d'une section*, b d f h k, (fig. 111) *faite par un plan auquel cette arête seroit perpendiculaire.*

Car puisque l'arête AB est supposée perpendiculaire au plan $bdfhk$, les autres arêtes qui sont

Digitized by Google

toutes parallèles à celles-là, seront aussi perpendiculaires au plan *b d f h k;* donc réciproquement les droites *bd*, *df*, *fh*, *hk*, etc. seront perpendiculaires chacune sur l'arête qu'elle coupe; en considérant donc les arêtes comme les bases des parallélogrammes qui enveloppent le prisme, les lignes *bd*, *df*, *fh* en seront les hauteurs. Il faudra donc, pour avoir la surface du prisme, multiplier l'arête *AB*, par la perpendiculaire *bd;* l'arête *CD*, par la perpendiculaire *df*, et ainsi de suite; et ajouter tous ces produits; mais comme toutes les arêtes sont égales, il est évident qu'il revient au même d'en multiplier une seule *AB*, par la somme de toutes les hauteurs, c'est-à-dire, par le contour *b d f h k*.

217. Quand le prisme est droit, la section *b d f h k* ne diffère pas de la base *B D F H K*, et l'arête *AB* est alors la hauteur du prisme; donc *la surface d'un prisme droit (en n'y comprenant point les deux bases), est égale au produit du contour de la base, multiplié par la hauteur.*

218. Nous avons vu ci-dessus (130) qu'on pouvoit considérer le cercle, comme un polygone régulier d'une infinité de côtés; donc le cylindre peut être considéré comme un prisme, dont le nombre des parallélogrammes qui composent la surface, seroit infini; donc,

La surface d'un cylindre droit est égale au produit de la hauteur de ce cylindre, par la circonférence de sa base. Nous avons vu (146) comment on doit s'y prendre pour avoir cette circonférence.

On peut dire aussi que la surface *d'un cylindre droit, est double de celle d'un cercle dont le rayon seroit moyen proportionnel entre la hauteur de ce cylindre et le rayon de sa base.*

Car si l'on représente par *H* la hauteur, par *r* le rayon de la base, et par *R* le rayon moyen proportionnel; et qu'en même temps on représente par *cir.* r, et *cir.* R, les circonférences qui ont pour rayon *r* et *R*, on aura, par la supposition, $r : R :: R : H$; et puisque les circonférences sont proportionnelles (131) aux rayons; on a *cir.* r : *cir.* R :: *R* : *H*. Or le produit des extrêmes de cette proportion est la surface du cylindre; et le produit des moyens est le double de la surface du cercle qui a pour rayon *R*; donc (*Arith.* 168) etc.

Dorénavant pour marquer la surface d'un cercle qui a pour rayon une ligne quelconque *R*, nous emploierons aussi cette expression abrégée *cir.* R.

A l'égard du cylindre oblique, il faut multiplier sa longueur *AB*, par la circonférence de la section *b g d h* (*fig.* 114), cette section étant faite comme

il a été dit (216). La méthode pour déterminer la longueur de cette section, dépend de connoissances plus étendues que celles que nous avons données jusqu'ici; dans la pratique, il faut se contenter de la mesurer mécaniquement, en enveloppant le cylindre avec un fil (ou autre chose équivalente), qu'on aura soin d'assujettir dans un plan auquel la longueur *AB* de ce cylindre, soit perpendiculaire.

219. *Pour la pyramide*, si elle n'est pas régulière, il faudra chercher séparément la surface de chacun des triangles qui la composent, et ajouter ces surfaces.

Mais si elle est régulière, on peut avoir sa surface plus brièvement, en multipliant le contour de sa base, par la moitié de l'apothême *AG* (*fig.* 117); car tous les triangles étant de même hauteur, il suffit de multiplier la moitié de la hauteur commune, par la somme de toutes les bases.

220. En considérant encore la circonférence d'un cercle comme un polygone régulier d'une infinité de côtés, on voit que le cône n'est, au fond, qu'une pyramide régulière, dont la surface (non compris celle de la base) est composée d'une infinité de triangles, et que, par conséquent, *la surface convexe d'un cône droit, est égale*

au produit de la circonférence de sa base, par la moitié du côté AB *de ce cône* (fig. 118).

A l'égard de la surface du cône oblique, elle dépend d'une Géométrie plus composée, ainsi nous n'en parlerons point ici. Au reste, la manière dont nous venons de considérer le cône, donne le moyen de le mesurer à-peu-près, lorsqu'il est oblique. Il faut partager la circonférence de la base en un assez grand nombre d'arcs, pour que chacun puisse être considéré, sans erreur sensible, comme une ligne droite; et alors on calculera la surface, comme pour une pyramide qui auroit autant de triangles qu'on a d'arcs.

221. *Pour avoir la surface d'un tronc de cône droit, dont les bases opposées* BGDH, bgdh (fig. 120) *sont parallèles; il faut multiplier le côté* Bb *de ce tronc, par la moitié de la somme des circonférences des deux bases opposées.*

En effet, on peut concevoir cette surface, comme l'assemblage d'une infinité de trapèzes tels que *EFfe* dont les côtés *Ee*, *Ff* tendent au sommet *A*; or la surface de chacun de ces trapèzes, est égale à la moitié de la somme de ces deux bases opposées *EF*, *ef*, multipliée par la distance de ces deux bases (142); mais cette distance ne diffère pas des côtés *Ee*, *Ff* ou *Bb*; donc pour avoir la somme de tous ces trapèzes, il faut multiplier la

Digitized by Google

moitié de la somme de toutes les bases opposées, telles que *EF*, *ef*, c'est-à-dire, la moitié de la somme des deux circonférences, par la ligne *Bb* hauteur commune de tous ces trapèzes.

222. Si par le milieu *M* du côté *Bb*, on conduit un plan parallèle à la base, la section (199) sera un cercle dont la circonférence sera la moitié de la somme des circonférences des deux bases opposées, puisque son diamètre *MN* (142) est la moitié de la somme de ceux des bases, et que (131) les circonférences sont entr'elles comme leurs diamètres. Donc *la surface d'un cône tronqué, à bases parallèles, est égale au produit du côté du tronc, par la circonférence de la section faite à distances égales des deux bases opposées.* Cette proposition va nous servir pour la démonstration de la suivante.

223. *La surface d'une sphère est égale au produit de la circonférence d'un de ses grands cercles, multiplié par le diamètre.*

Concevez la demi-circonférence *AKD* (*fig.* 122) divisée en une infinité d'arcs; chacun de ces arcs, tel que *KL*, étant infiniment petit, se confondra avec sa corde.

Menons par les extrémités de *KL*, les perpendiculaires *KE*, *LF* au diamètre *AD*; et par le

milieu *I* de *KL* ou de sa corde, menons *IH* parellèle à *KE*, et le rayon *IC*; ce rayon sera perpendiculaire sur *KL* (52); tirons enfin *KM* perpendiculaire sur *IH* ou sur *LF*. Si l'on conçoit que la demi-circonférence *AKD* tourne autour de *AD*, elle engendrera la surface de la sphère, et chacun de ses arcs *KL* engendrera la surface d'un cône tronqué, qui sera un élément de celle de la sphère. Nous allons voir que la surface de ce cône tronqué est égale au produit de *KM* ou *EF* multiplié par la circonférence qui a pour rayon *IC* ou *AC*.

Le triangle *KML* est semblable au triangle *IHC*, puisque ces deux triangles ont les côtés perpendiculaires l'un à l'autre, d'après ce qu'on vient de prescrire. Ces triangles semblables donneront donc (111) cette proportion *KL* : *KM* :: *IC* : *IH*; ou, (puisque (131) les circonférences sont entr'elles comme leurs rayons) *KL* : *KM* :: *cir.* IC : *cir.* IH; donc puisque (*Arith.* 168) dans toute proportion, le produit des extrêmes est égal au produit des moyens, *KL* × *cir.* IH est égal à *KM* × *cir.* IC, ou (ce qui revient au même) est égal à *EF* × *cir.* AC. Or (222) le premier de ces produits exprime la surface du cône tronqué engendré par *KL*; donc ce cône tronqué est égal à *EF* × *cir.* AC, c'est-à-dire, au produit de sa hauteur *EF* par la circonférence d'un grand

Digitized by Google

cercle de la sphère. Et comme en prenant tout autre arc que KL, on démontreroit la même chose et de la même manière, on doit conclure que la somme des petits cônes tronqués qui composent la surface de la sphère, est égale à la circonférence d'un des grands cercles, multipliée par la somme des hauteurs de ces cônes tronqués, laquelle somme compose évidemment le diamètre. Donc la surface de la sphère est égale à la circonférence d'un de ses grands cercles, multipliée par le diamètre.

224. Si l'on conçoit un cylindre (*fig.* 123) qui entoure la sphère en la touchant, et qui ait pour hauteur le diamètre de cette sphère ; c'est-à-dire, si l'on conçoit un cylindre circonscrit à la sphère, on pourra conclure que *la surface de la sphère est égale à la surface convexe du cylindre circonscrit;* car (218) la surface de ce cylindre est égale au produit de la circonférence de la base, multipliée par la hauteur; or la circonférence de la base est celle d'un grand cercle de la sphère, et la hauteur est égale au diamètre; donc, etc.

225. Puisque (145) pour avoir la surface d'un cercle, il faut multiplier la circonférence par la moitié du rayon ou le quart du diamètre, et que pour avoir celle de la sphère, il faut mul-

tiplier la circonférence par le diamètre, on doit donc dire que *la surface de la sphère est quadruple de celle d'un de ses grands cercles.*

226. La démonstration que nous venons de donner de la mesure de la surface de la sphère, prouve également que pour avoir la surface convexe du segment sphërique qu'engendreroit l'arc *AL* (*fig.* 124) tournant autour du diamètre *AD*, il faut multiplier la circonférence d'un grand cercle de la sphère, par la hauteur *AI* de ce segment; et que pour avoir celle d'une portion de sphère comprise entre deux plans parallèles tels que *LKM*, *NRP*, il faut pareillement multiplier la circonférence d'un grand cercle de la sphère, par la hauteur *IO* de cette portion de sphère. Car on peut considérer ces surfaces, ainsi qu'on l'a fait pour la sphère entière, comme composées d'une infinité de cônes tronqués, dont chacun est égal au produit de sa hauteur par la circonférence d'un grand cercle de la sphère.

Des rapports des Surfaces des Solides.

227. Si deux solides dont on a dessein de comparer les surfaces, sont terminés par des plans dissemblables et irréguliers, le seul parti qu'il y ait à prendre, pour trouver le rapport de leurs surfaces, est de calculer séparément la

surface de chacun en mesures de même espèce, et de comparer le nombre des mesures de l'une, au nombre des mesures de l'autre ; c'est-à-dire, par exemple, le nombre des pieds quarrés de l'une, au nombre des pieds quarrés de l'autre.

228. *Les surfaces des prismes, (en n'y comprenant point les bases opposées) sont entr'elles comme les produits de la longueur de ces prismes, par le contour de la section faite perpendiculairement à cette longueur.*

Car ces surfaces sont égales à ces produits (216).

Donc *si les longueurs sont égales, les surfaces des prismes seront entr'elles comme le contour de la section faite perdendiculairement à la longuenr de chacun.* Car le rapport des produits de la longueur, par le contour de cette section, ne changera point si l'on omet, dans chacun de ces produits, la longueur qui en est facteur commun.

229. Donc *les surfaces des prismes droits ou des cylindres droits de même hauteur, sont entr'elles comme les contours des bases, quelque figure qu'aient d'ailleurs ces bases.*

Et si, au contraire, *les contours des bases sont les mêmes, et les hauteurs différentes, ces surfaces seront comme les hauteurs.*

230. *Les surfaces des cônes droits, sont entr'elles*

comme les produits des côtés de ces cônes, par les circonférences des bases, ou par les rayons, ou par les diamètres de ces bases.

Car ces surfaces étant égales chacune au produit de la circonférence de la base, par la moitié du côté du cône (220), doivent être entr'elles comme ces produits, et par conséquent comme le double de ces produits. D'ailleurs, comme les circonférences ont entr'elles le même rapport que leurs rayons ou leurs diamètres, on peut (99) substituer dans ces produits, le rapport des rayons ou celui des diamètres, à celui des circonférences.

231. *Les surfaces des solides semblables, sont entr'elles comme les quarrés de leurs lignes homologues.*

Car elles sont composées de plans semblables dont les surfaces sont entr'elles comme les quarrés de leurs côtés ou de leurs lignes homologues, lesquelles lignes sont lignes homologues des solides, et proportionnelles à toutes les autres lignes homologues.

232. *Les surfaces de deux sphères, sont entr'elles comme les quarrés de leurs rayons ou de leurs diamètres;* car la surface d'une sphère étant quadruple de celle de son grand cercle, les surfaces de deux sphères doivent être entr'elles comme

le

Digitized by Google

le quadruple de leurs grands cercles, ou simplement comme leurs grands cercles ; c'est-à-dire, (162) comme les quarrés des rayons ou des diamètres.

De la solidité des Prismes.

233. Pour fixer les idées sur ce qu'on doit entendre par la *solidité* d'un corps, il faut se représenter, par la pensée, une portion d'étendue de telle forme qu'on voudra, de la forme d'un cube, par exemple, mais qui ait infiniment peu de longueur, de largeur et de profondeur, et concevoir que la capacité d'un corps est entièrement remplie de pareils cubes que nous nommerons *points solides.* La totalité de ces points forme ce que nous entendons par *solidité* d'un corps.

234. *Deux prismes ou deux cylindres, ou un prisme et un cylindre de même base et de même hauteur, ou de bases égales et de hauteurs égales, sont égaux en solidité, quelque différentes que soient d'ailleurs les figures des bases.*

Car si l'on imagine ces corps, coupés par des plans parallèles à leurs bases, en tranches infiniment minces, et d'une épaisseur égale à celle des points solides dont on peut imaginer que ces corps sont remplis, il est visible que, dans chacun,

chaque section étant égale à la base (204), le nombre de points solides, dont chaque tranche sera composée, sera par-tout le même, et égal au nombre des points superficiels de la base : et comme on suppose même hauteur aux deux solides, ils auront chacun le même nombre de tranches ; ils contiendront donc en totalité, le même nombre de points solides ; donc ils sont égaux en solidité.

De la mesure de la solidité des Prismes et des Cylindres.

235. La considération des points solides dont nous venons de faire usage, est principalement utile lorsque, pour démontrer l'égalité de deux solides, on est obligé de considérer ces solides dans leurs élémens mêmes, en les décomposant en tranches infiniment minces ; nous aurons encore occasion de les considérer de cette manière. Mais lorsqu'on veut mesurer les capacités ou solidités des corps, pour les usages ordinaires, ce n'est point en cherchant à évaluer le nombre de leurs points solides qu'on y parvient ; car on conçoit très-bien que dans tel corps que ce soit, il y a une infinité de ces sortes de points.

Que fait-on donc, à proprement parler, quand on mesure la solidité des corps? on cherche à dé-

Digitized by Google

terminer combien de fois, le corps dont il s'agit, contient un autre corps connu. Par exemple, quand on veut mesurer le parallélipipède rectangle *ABCDEFGH* (*fig.* 126), on a pour objet de connoître combien ce parallélipipède contient de cubes tels que le cube connu *x*; c'est ordinairement en mesures cubiques, qu'on évalue les solidités des corps.

Pour connoître la solidité du parallélipipède rectangle *ABCDEFGH*, il faut chercher combien sa base *EFGH* contient de parties quarrées telles que *efgh;* chercher pareillement combien la hauteur *AH* contient de fois la hauteur *ah;* et multipliant le nombre des parties quarrées de *EFGH*, par le nombre des parties de *AH*, le produit exprimera combien le parallélipipède proposé, contient de cubes tels que *x;* c'est-à-dire, combien il contient de pieds-cubes, ou de pouces-cubes, etc. si le côté *ah* du cube *x* est d'un pied ou d'un pouce.

En effet, on voit qu'on peut placer sur la surface *EFGH* autant de cubes tels que *x*, qu'il y a de quarrés tels que *efgh* dans la base *EFGH*. Tous ces cubes formeront un parallélipipède dont la hauteur *HL* sera égale à *ah*; or il est évident qu'on pourra placer dans le solide *ABCDEFGH* autant de parallélipipèdes tel que celui-là, que la hauteur *HL* sera contenue de fois dans *AH;*

donc il faut répéter ce parallélipipède ou le nombre des cubes répandus sur *EFGH*, autant de fois qu'il y a de parties dans *AH*; ou puisque le nombre de ces cubes est le même que le nombre des quarrés contenus dans la base, il faut multiplier le nombre des quarrés contenus dans la base, par le nombre des parties de la hauteur, et le produit exprimera le nombre de cubes contenus dans le parallélipipède proposé.

236. Puisqu'on a démontré (234) que les prismes de bases égales et de hauteurs égales, sont égaux en solidité, il suit de cette proposition, et de ce que nous venons de dire, que pour avoir le nombre de mesures cubes que renfermeroit le prisme quelconque *ACEGIKBDFH*, (*fig*. 111) il faut évaluer sa base *KBDFH* en mesures quarrées, et sa hauteur *LM* en parties égales au côté du cube qu'on prend pour mesure, et multiplier le nombre des mesures quarrées qu'on aura trouvées dans la base, par le nombre des mesures linéaires de la hauteur; ce qu'on exprime ordinairement en disant : *La solidité d'un prisme quelconque est égale au produit de la surface de la base, par la hauteur de ce prisme.*

Mais nous devons observer ici la même chose que nous avons fait remarquer (139) à l'occasion des surfaces : de même qu'on ne peut pas dire

Digitized by Google

avec exactitude, qu'on multiplie une ligne par une ligne, on ne peut pas dire non plus qu'on multiplie une surface par une ligne. C'est, ainsi qu'on vient de le voir, un solide (dont le nombre des cubes est le même que le nombre des quarrés de la base) qu'on répète autant de fois que la hauteur est comprise dans celle du solide total, c'est-à-dire, autant de fois qu'il est dans le solide qu'on veut mesurer.

237. Concluons de ce qui précède, que *pour avoir la solidité d'un cylindre droit ou oblique, il faut pareillement multiplier la surface de sa base, par la hauteur de ce cylindre*, puisqu'un cylindre est égal à un prisme de même base et de même hauteur que lui (234).

De la solidité des Pyramides.

238. Rappelons-nous ce qui a été dit (199 *et suiv.*) et en l'appliquant aux pyramides, nous en conclurons que si l'on coupe deux pyramides *IABCDF*, *IKLM*, (*fig.* 108), de même hauteur, par un même plan *ge*, parallèle au plan de leur base (*), les sections *abcdf*, *klm* seront

(*) Nous supposons, pour plus de simplicité, qu'on ait rendu le sommet commun, et qu'on ait placé les bases sur un même plan *GK*.

entr'elles dans le rapport des bases *ABCDF*; *KLM*; et seront par conséquent égales si ces bases sont égales. Si l'on conçoit de nouveau ces pyramides, coupées par un plan parallèle au plan *ge*, et infiniment près de celui-ci, on voit que les deux tranches solides, comprises entre ces deux plans infiniment voisins, doivent être aussi entr'elles dans le rapport des bases; car le nombre des points solides nécessaires pour remplir ces deux tranches d'égale épaisseur, ne peut dépendre que de la grandeur des sections correspondantes.

Cela posé, comme les deux pyramides sont de même hauteur, on ne peut pas concevoir plus de tranches dans l'une que dans l'autre; ainsi les tranches correspondantes étant toujours dans le rapport des bases, les totalités de ces tranches, et par conséquent les solidités des pyramides, seront entre elles comme les bases. Donc *les solidités de deux pyramides de même hauteur, sont entr'elles comme les bases de ces pyramides*, et par conséquent *les pyramides de bases égales et de hauteurs égales sont égales en solidité, quelque différentes que soient d'ailleurs les figures des bases.*

Digitized by Google

Mesures de la solidité des Pyramides.

239. Puisque mesurer un corps, n'est autre chose que chercher combien de fois il contient un autre corps connu ; ou, en général, chercher quel est son rapport avec un autre corps connu ; il ne s'agit donc, pour pouvoir mesurer les pyramides, que de trouver leur rapport avec les prismes ; c'est ce que nous allons établir dans la proposition suivante.

240. *Une pyramide quelconque est le tiers d'un prisme de même base et de même hauteur qu'elle.*

La démonstration de cette proposition se réduit à faire voir qu'une pyramide triangulaire est le tiers d'un prisme triangulaire de même base et de même hauteur qu'elle ; car on peut toujours concevoir un prisme, comme composé d'autant de prismes triangulaires, et une pyramide comme composée d'autant de pyramides triangulaires qu'on peut concevoir de triangles dans le polygone, qui sert de base à l'un et à l'autre, *voyez fig.* 111.

Or voici comment on peut se convaincre de la vérité de la proposition, pour la pyramide triangulaire. Soit *ABCDEF*, (*fig.* 127), un prisme triangulaire : concevez que sur les faces

AE, *CE* de ce prisme, on ait tiré les deux diagonales *BD*, *BF*, et que suivant ces diagonales on ait conduit un plan *BDF*; ce plan détachera du prisme une pyramide de même base et de même hauteur que ce prisme, puisqu'elle a son sommet en *B* dans la base supérieure, et qu'elle a pour base, la base même inférieure *DEF* du prisme: on voit cette pyramide isolée dans la *figure* 128; et la *figure* 129 représente ce qui reste du prisme.

On peut se représenter ce reste, comme renversé ou couché sur la face *ADFC*; et alors on voit que c'est une pyramide quadrangulaire, qui a pour base le parallélogramme *ADFC*, et pour sommet le point *B*; donc, si l'on conçoit que dans la base *ADFC* on ait tiré la diagonale *CD*, on pourra se représenter que la pyramide totale *ADFCB* est composée de deux pyramides triangulaires *ADCB*, *CFDB* qui auront pour bases les deux triangles égaux *ACD*, *CDF*, et pour sommet commun le point *B*, et qui, par conséquent, seront égales (238). Or de ces deux pyramides, l'une, savoir la pyramide *ADCB* peut être conçue comme ayant pour base le triangle *ABC*, c'est-à-dire, la base supérieure du prisme, et pour sommet le point *D* qui a appartenu à la base inférieure; cette pyramide est donc égale à la pyramide *DEFB*

Digitized by Google

(*fig.* 128), puisqu'elle a même base et même hauteur que celle-ci ; donc les trois pyramides *DEFB*, *ADCB*, *CFDB* sont égales entr'elles ; et puisque réunies elles composent le prisme, il faut en conclure que chacune est le tiers du prisme ; ainsi la pyramide *DEFB* est le tiers du prisme *ABCDEF* de même base et de même hauteur qu'elle.

241. Puisqu'un cône peut être considéré comme une pyramide, dont le contour de la base auroit une infinité de côtés ; et le cylindre, comme un prisme, dont le contour de la base auroit aussi une infinité de côtés ; il faut en conclure, qu'*un cône droit ou oblique, est le tiers d'un cylindre de même base et de même hauteur.*

242. Donc, *pour avoir la solidité d'une pyramyde ou d'un cône quelconque, il faut multiplier la surface de la base par le tiers de la hauteur.*

243. A l'égard du tronc de pyramide ou de cône, lorsque les deux bases opposées sont parallèles, ce qu'il y a à faire pour en trouver la solidité, consiste à trouver la hauteur de la pyramide retranchée, et alors il est aisé de calculer la solidité de la pyramide entière et de la pyramide retranchée, et par conséquent celle du tronc. Par exemple, dans la *figure* 108, si je veux avoir

Digitized by Google

la solidité du tronc *KLMklm*, je vois (242) qu'il faut multiplier la surface *KLM*, par le tiers de la hauteur *IP*; multiplier pareillement la surface *klm* par le tiers de la hauteur *Ip*, et retrancher ce dernier produit du premier; mais comme on ne connoît ni la hauteur de la pyramide totale, ni celle de la pyramide retranchée; voici comment on déterminera l'une et l'autre. On a vu ci-dessus (199), que les lignes *IL*, *IM*, *IP*, etc. sont coupées proportionnellement par le plan *ge*, et qu'elles sont à leurs parties *Il*, *Im*, *Ip*, comme *LM* : *lm*; on aura donc *LM* : *lm* :: *IP* : *Ip*;

Donc (*Arith.* 174) *LM* — *lm* : *LM* :: *IP* — *Ip* : *IP*.

C'est-à-dire, *LM* — *lm* : *LM* :: *Pp* : *IP*.

Or quand on connoît le tronc, on peut aisément mesurer les côtés *LM*, *lm* et la hauteur *Pp*; on pourra donc, par cette proportion, calculer le quatrième terme *IP*, ou la hauteur de la pyramide totale, et en retranchant celle du tronc, on aura la hauteur de la pyramide retranchée.

De la solidité de la Sphère, de ses Secteurs, et de ses Segmens.

244. *Pour avoir la solidité d'une sphère, il faut multiplier sa surface par le tiers du rayon.*

Digitized by Google

Car on peut considérer la surface de la sphère comme l'assemblage d'une infinité de plans infiniment petits, dont chacun sert de base à une petite pyramide, qui a son sommet au centre de la sphère, et qui, par conséquent, a pour hauteur le rayon; puis donc que chacune de ces petites pyramides est égale (242) au produit de sa base par le tiers de sa hauteur, c'est-à-dire par le tiers du rayon; elles seront toutes ensemble égales au produit de la somme de toutes leurs bases par le tiers du rayon, c'est-à-dire, égales au produit de la surface de la sphère, par le tiers du rayon.

245. Puisque la surface de la sphère est (225) quadruple de celle d'un de ses grands cercles, *on peut donc, pour avoir la solidité d'une sphère, multiplier le tiers du rayon par quatre fois la surface d'un des grands cercles, ou quatre fois le tiers du rayon par la surface d'un des grands cercles, ou enfin les $\frac{2}{3}$ du diamètre par la surface d'un des grands cercles.*

246. Pour avoir la solidité d'un cylindre, nous avons vu qu'il falloit multiplier la surface de la base par la hauteur; s'il s'agit donc du cylindre circonscrit à la sphère (*fig.* 123), on peut dire que la solidité est égale au produit d'un des grands cercles de la sphère, par le diamètre;

or celle de la sphère (245) est égale au produit d'un des grands cercles par les $\frac{2}{3}$ du diamètre ; donc *la solidité de la sphère n'est que les $\frac{2}{3}$ de celle du cylindre circonscrit.*

Si on veut comparer la solidité de la sphère au cube de son diamètre, en représentant par D le diamètre, on aura donc $\frac{2}{3} D \times cer.\ D$ pour cette solidité, ou bien $\frac{2}{3} D \times cir.\ D \times \frac{1}{4} D$, ou $\frac{1}{6} \overline{D}^2 \times cir.\ D$. Et le cube du diamètre sera $\overline{D}^3$, donc la solidité de la sphère est au cube de son diamètre, comme $\frac{1}{6} \overline{D}^2 \times cir.\ D : \overline{D}^3$, ou :: $\frac{1}{6}$ $cir.\ D : D$, ou :: $cir.\ D : 6D$; c'est-à-dire, comme la circonférence d'un cercle est à 6 fois son diamètre. Par exemple, en prenant le rapport de 22 : 7 pour celui du diamètre à la circonférence, la solidité de la sphère est au cube de son diamètre, comme 22 est à 42, ou comme 11 est à 21.

247. La surface de la calotte sphérique *AGBHEA* qui sert de base à un secteur sphérique *CBGEHA*, (*fig.* 121) peut être aussi considérée comme l'assemblage d'une infinité de plans infiniment petits, et par conséquent le secteur sphérique, lui-même, peut être considéré comme l'assemblage d'une infinité de pyramides, qui ont toutes pour hauteur le rayon, et dont la totalité des bases forme la surface de

Digitized by Google

ce secteur ; donc *le secteur sphérique est égal au produit de la surface de la calotte, par le* $\frac{1}{3}$ *du rayon.* Nous avons vu (226), comment on trouve la surface de la calotte.

248. A l'égard du segment, comme il vaut le secteur *CBGEHA* moins le cône *CBGEH*, il sera toujours facile à calculer ; mais on peut le calculer plus commodément à l'aide du principe suivant.

La solidité d'un segment sphérique ABGEHA (fig. 121), *est égale à celle d'un cylindre qui auroit la flèche* AF *pour rayon de sa base, et qui auroit pour hauteur le rayon* CA *de la sphère moins le tiers de la flèche* AF.

Concevons la solidité de ce segment comme composée d'une infinité de tranches circulaires, parallèles à *BGHE*, et d'une épaisseur infiniment petite ; le nombre des points solides de chaque tranche ne dépendant alors que de la section circulaire, pourra être représenté par cette section même ; ainsi la tranche correspondante à *IN*, par exemple, pourra être représentée par *cer. IN*.

Menons la corde *AN* ; à cause du triangle rectangle *AIN* (170), on aura *cer. IN* égal à *cer. AN* — *cer. AI*; donc la somme des *cer. IN*, ou la solidité du segment, sera égale à la somme des *cer. AN* moins la somme des *cer. AI* cor-

respondans. Voyons donc ce que vaut chacune de ces deux sommes.

Puisque (173) *AN* est moyenne proportionnelle entre *AI* et *AD*, *cer. AN* est (218) moitié de la surface d'un cylindre qui auroit *AI* pour rayon de sa base, et *AD* pour hauteur, ou bien est égal à un cylindre qui auroit *AI* pour rayon de sa base, et *AC* pour hauteur. Donc la somme des *cer. AN* sera égale à la somme des enveloppes cylindriques qui ayant *AC* pour hauteur, auroient successivement pour rayons de leurs bases, les différentes lignes *AI*. Donc la somme des *cer. AN* est égale à la solidité d'un cylindre qui auroit *AC* pour hauteur, et *AF* pour rayon de sa base.

A l'égard de la somme des *cer. AI*; si sur *AC* on conçoit le quarré *ACPQ*, et qu'ayant tiré la diagonale *AP* on prolonge *AI* jusqu'en *R*, on aura *AI* égale à *IR*; donc la somme des *cer. AI* sera égale à la somme des *cer. IR*, laquelle prise de *A* en *F* compose le cône qui auroit *AF* pour hauteur, et *cer. FS* ou *cer. AF* pour base. Elle est donc égale à ce cône, ou à un cylindre qui auroit aussi *cer. AF* pour base, et $\frac{1}{3}$ *AF* pour hauteur. Donc la somme des *cer. AN*, moins la somme des *cer. AI*, c'est-à-dire la somme des *cer. NI*, ou la solidité du segment, est égale au cylindre qui auroit

Digitized by Google

cer. AF pour base, et AC pour hauteur, moins le cylindre qui auroit aussi *cer.* AF pour base, et $\frac{1}{3}$ AF pour hauteur; c'est-à-dire, est égale au cylindre qui auroit *cer.* AF pour base, et $CA - \frac{1}{3} AF$ pour hauteur.

Donc, pour avoir la solidité d'un segment sphérique, il faut multiplier le cercle, qui a pour rayon la flèche, par le rayon de la sphère moins le tiers de la flèche.

Pour donner un exemple du calcul de la solidité de la sphère et de ses segmens; supposons que l'on demande le poids d'une bombe de 10 pouces de diamètre, ayant 18 lignes d'épaisseur, avec un culot renforcé de 6 lignes de flèche. Le pied cube de fer coulé pèse 519 liv. $\frac{3}{4}$.

Nous calculerons d'abord la solidité de la sphère de 10 pouces; et ensuite nous calculerons celle d'une sphère de 7 pouces; c'est-à-dire, de 10 pouces moins le double de l'épaisseur de la bombe; nous calculerons, dis-je, la solidité de cette dernière, diminuée de celle du culot de 6 lignes de flèche, c'est-à-dire, que nous ne calculerons de celle-ci que le segment sphérique qui auroit 7 pouces moins 6 lignes, ou 6 pouces $\frac{1}{2}$ de flèche.

Pour avoir la solidité de la sphère de 10 pouces, il faut (246) multiplier le cube de son diamètre par $\frac{11}{21}$; ainsi, opérant par logarithmes, j'ai

Log.	10	1,0000000
Log.	$\overline{10}^3$	3,0000000
Log.	11	1,0413927
Complément-Log.	21	8,6777807
Somme		12,7191734

Qui répond à 523,81 ; donc la sphère de 10 pouces de diamètre, a une solidité de 523,81 pouces cubes.

Pour avoir la solidité du segment sphérique de 6 pouces $\frac{1}{2}$ de flèche dans une sphère de 7 pouces de diamètre, il faut (248) multiplier la surface du cercle de 6 pouces $\frac{1}{2}$ de rayon, par le rayon de la sphère moins le tiers de la flèche ; c'est-à-dire, par 1 pouce et $\frac{1}{3}$.

Donc, et d'après ce qui a été dit (157), opérant par logarithmes, on aura

Log.	$6\frac{1}{2}$	0,8129134
Log.	$\overline{6\frac{1}{2}}^{2}$	1,6258268
Log.	$\frac{22}{7}$	0,4973247
Log.	$1\frac{1}{3}$	0,1249387
	Somme	2,2480902
	qui répond à	177,05

Donc, la solidité du vide de la bombe est de 177,05 pouces cubes, et par conséquent la solidité du plein est de 346,76 pouces cubes.

Il ne s'agit donc plus, pour avoir le poids de la bombe, que de multiplier par $519\frac{3}{4}$, et de diviser par 1728, parce que le poids d'un pouce cube est la 1728[e] partie de celui du pied cube ; ainsi

Log.	346,76 . .	2,5400290
Log.	$519\frac{3}{4}$ . . .	2,7157945
Complément-Log.	1728 . . .	6,7624563
	Somme . . .	12,0182798
	qui répond à	104[liv.], 3

Qui est le poids de la bombe, non compris le vide de l'œil ni le poids des anses et anneaux.

De

De la mesure des autres Solides.

249. Pour les autres solides, terminés par des surfaces planes, la méthode qui se présente naturellement pour les mesurer, c'est de les imaginer composés de pyramides, qui aient pour bases ces surfaces planes, et pour sommet commun, l'un des angles du solide dont il s'agit; mais outre que cette méthode est rarement la plus commode, elle est d'ailleurs moins expéditive et moins propre pour la pratique, que la suivante.

250. Nous appellerons *prisme tronqué*, le solide *ABCDEF* (*fig.* 130) qui reste lorsqu'on a séparé une partie d'un prisme, par un plan *ABC* incliné à la base.

251. *Un prisme triangulaire tronqué, est composé de trois pyramides, qui ont chacune pour base, la base* DEF *du prisme, et dont la première a son sommet en* B, *la seconde en* A, *et la troisième en* C.

Avec une légère attention, on peut se représenter le prisme tronqué, comme composé de deux pyramides, l'une triangulaire, qui aura son sommet au point *B*, et pour base le triangle *DEF*; la seconde qui aura aussi son sommet

au point *B*, mais qui aura pour base le quadrilatère *ADFC*.

Si l'on tire la diagonale *AF* de ce quadrilatère, on peut se représenter la pyramide quadrangulaire *BADFC* comme composée de deux pyramides triangulaires *BADF*, *BACF*; or la pyramide *BADF* est égale en solidité à une pyramide *EADF*, qui ayant la même base *ADF*, auroit son sommet au point *E*, car la ligne *BE* étant parallèle au plan *ADF*, ces deux pyramides auront même hauteur; mais la pyramide *EADF* peut être considérée comme ayant pour base *EDF*, et son sommet au point *A*; voilà donc, jusqu'ici, deux des trois pyramides, dont nous avons dit que le prisme tronqué doit être composé; il ne reste donc plus qu'à faire voir que la pyramide *BACF* est équivalente à une pyramide qui auroit aussi pour base *EDF*, et qui auroit son sommet en *C*; or c'est ce qu'il est facile de voir en tirant la diagonale *CD*, et faisant attention que la pyramide *BACF* doit être égale à la pyramide *EDCF*; parce que ces deux pyramides ont leurs sommets *B* et *E* dans la même ligne *BE* parallèle au plan *ACFD* de leurs bases; et que ces bases *ACF* et *CFD* sont égales, puisque ce sont des triangles qui ont même base *CF*, et qui sont compris entre les parallèles *AD* et *CF*; ainsi, la pyramide

BACF est égale à la pyramide *EDCF*; mais celle-ci peut être considérée comme ayant pour base *DEF*, et son sommet en *C*; donc, en effet, le prisme tronqué est composé de trois pyramides qui ont pour base commune le triangle *DEF*, et dont la première a son sommet en *B*, la seconde en *A*, la troisième en *C*.

252. Donc, *pour avoir la solidité d'un prisme triangulaire tronqué, il faut abaisser de chacun des angles de la base supérieure, une perpendiculaire sur la base inférieure, et multiplier la base inférieure par le tiers de la somme de ces trois perpendiculaires.*

253. On peut tirer de cette proposition plusieurs conséquences pour la mesure des prismes tronqués autres que les triangulaires, et même pour d'autres solides; si l'on conçoit, par exemple, que de tous les angles d'un solide, terminé par des surfaces planes, on mène sur un même plan, pris comme on le voudra, des perpendiculaires; on fera naître autant de prismes tronqués qu'il y aura de faces dans le solide; comme chaque prisme tronqué devient facile à mesurer, d'après ce que nous venons de dire, tout solide terminé par des surfaces planes, se mesurera donc aussi facilement par les mêmes principes.

254. Par exemple, s'il s'agit de trouver la solidité du corps *ABCDHEFG* (*fig.* 131 *et* 132), composé de deux prismes triangulaires tronqués, dont les arêtes *AE*, *BF*, *CG*, *DH*, soient perpendiculaires à la base qui sera d'ailleurs un quadrilatère quelconque.

On imaginera la diagonale *EG*, correspondant à l'arête *AC*, et l'on aura $EFG \times \frac{AE + BF + CG}{3}$ pour la solidité de la partie qui répond au triangle *EFG*; on aura pareillement $EHG \times \frac{AE + DH + CG}{3}$ pour la solidité de la partie qui répond au triangle *EHG*.

255. Si les deux triangles *EFG*, *EHG*, sont égaux, comme il arrive, lorsque la base est un parallélogramme, on aura $\frac{1}{2} EFGH \times \frac{2\,AE + 2\,CG + BF + DH}{3}$ pour la solidité totale.

256. Si les perpendiculaires *AE*, *BF*, etc. restant les mêmes, la surface supérieure, au lieu d'être terminée par les deux plans *ADC*, *ABC* qui ont pour section commune *AC*, étoit terminée par deux plans qui eussent pour section commune *BD*; alors la solidité seroit exprimée par $\frac{1}{2} EFGH \times \frac{2\,BF + 2\,DH + AE + CG}{3}$.

Si après avoir ajouté ce solide au précédent, on prend moitié du tout, on aura $EFGH \times \frac{BF + DH + AE + CG}{4}$ pour la valeur du solide qui tiendroit le milieu entre les deux que nous venons de considérer pour chaque figure.

257. Cette dernière expression renferme la règle que suivent plusieurs Praticiens pour mesurer la solidité des

Digitized by Google

corps tels que ceux des *fig.* 131 *et* 132 ; d'où l'on voit que cette règle n'est pas rigoureusement exacte ; on peut même ajouter qu'elle peut souvent conduire à une erreur assez forte ; pour nous en convaincre, prenons un cas fort simple ; supposons, *fig.* 132, que AE et GC soient chacune zéro ; on aura $\frac{1}{2} EFGH \times \frac{BF + DH}{3}$ ou $EFGH \times \frac{BF + DH}{6}$ pour la solidité du corps représenté par la *fig.* 132 ; mais par la règle dont il s'agit, on auroit $EFGH \times \frac{BF + DH}{4}$; or ces deux solides sont l'un à l'autre :: $\frac{1}{6}$: $\frac{1}{4}$ ou :: 4 : 6 :: 2 : 3 ; cette règle feroit donc trouver la solidité trop forte de moitié en sus de sa véritable valeur ; il est vrai que dans ce cas, où il est facile de voir que le solide est composé de deux pyramides triangulaires, on verroit facilement que l'on ne doit point admettre cette règle ; mais il n'en est pas moins à conclure, de cet exemple simple, que l'application aux cas plus composés ne donne point une approximation suffisante.

258. Tout ce que nous venons de dire, ne supposant point que ABC et ADC, (*fig.* 131 *et* 132), soient dans des plans différens, a également lieu lorsqu'ils sont dans un même plan ; et puisque ce qui a été dit (254) a lieu, lorsque la base est d'un quadrilatère quelconque, il est facile d'en conclure la mesure de la solidité d'un ponton, (*fig.* 153).

L'avant et l'arrière du ponton, ses flancs, son fond, et son ouverture supérieure, sont tous des surfaces planes ; et les arêtes formées par les flancs, le fond et l'ouverture, sont des lignes parallèles ; l'ouverture a plus de largeur que le fond, en sorte que la section faite perpendiculairement à la longueur est un trapèze tel que $EFGH$.

Si donc on conçoit le ponton coupé perpendiculairement

Digitized by Google

à sa longueur, et au milieu ; il résulte évidemment de ce qui a été dit (254), que chaque moitié est un composé de deux prismes triangulaires tronqués, dont l'un a pour expression $EHG \times \frac{AE + DH + CG}{3}$ ou $EHG \times \frac{2AE + CG}{3}$, parce que AE est égal à DH. Pareillement le second prisme triangulaire aura pour expression $EFG \times \frac{2CG + AE}{3}$; donc le ponton entier aura pour expression $EHG \times \frac{2AI + CL}{3}$ $+ EFG \times \frac{2CL + AI}{3}$. Or la profondeur du ponton étant connue, on aura la hauteur commune des deux triangles, qui, par conséquent, seront faciles à calculer ; il sera donc facile d'avoir la solidité du ponton : nous en verrons un exemple dans peu.

L'avant et l'arrière du ponton sont communément inclines de 45 degrés sur le fond ; cette circonstance peut fournir une autre expression ; mais comme elle n'est pas plus simple que la précédente, nous ne nous y arrêterons pas.

Du Toisé des Solides.

259. Pour toiser un solide ; c'est-à-dire, pour évaluer un solide, en toises-cubes, et parties de la toise-cube, on peut s'y prendre de deux manières principales. La première, est de compter par toises-cubes, et par parties-cubes de la toise-cube ; c'est-à-dire, par toises-cubes, pieds-cubes, pouces-cubes, etc.

Digitized by Google

La *toise-cube* ou *cubique* contient 216 pieds-cubes, parce que c'est un cube qui a 6 pieds de long, 6 pieds de large, et 6 pieds de haut.

Le *pied-cube* contient 1728 pouces-cubes, parce que c'est un cube qui a 12 pouces de long, sur 12 pouces de large, et 12 pouces de haut.

Par la même raison, on voit que le *pouce-cube* contient 1728 lignes-cubes, et ainsi de suite.

Donc, pour évaluer un solide en toises-cubes et parties-cubes de la toise-cube, il faudra réduire chacune de ses trois dimensions à la plus petite espèce, multiplier deux de ces dimensions ainsi réduites, l'une par l'autre, et le produit résultant, par la troisième ; et pour réduire en lignes-cubes, pouces-cubes, pieds-cubes et toises-cubes, (en supposant que la plus petite espèce ait été des points) on divisera successivement par 1728, 1728, 1728 et 216, ou seulement par 1728, 1728 et 216, si la plus petite espèce est seulement des lignes, et ainsi de suite.

EXEMPLE.

On veut avoir la solidité d'un parallélipipède qui a $2^T\ 4^P\ 8^{po}$ de long, $1^T\ 3^P$ de large, et $3^T\ 5^P\ 7^{po}$ de haut.

$2^T\ 4^P\ 8^p \ldots\ldots\ 200^p$

$1^T\ 3^P\ 0^p \ldots\ldots\ 108^p$

21600^{pp}

$3^T\ 5^P\ 7^p \ldots\ldots\ 283^p$

6112800^{ppp}

6112800	1728
864	3537^{ppp}

3537^{ppp}	216
81^{ppp}	16^{TTT}

Ce parallélipipède contient donc $16^{TTT}\ 81^{PPP}\ 864^{ppp}$.

260. Dans la seconde manière d'évaluer les solides, en toises-cubes et parties de la toise-cube, on se représente la toise cube partagée en six parallélipipèdes, qui ont tous une toise quarrée de base, sur un pied de haut, et que pour cette raison on appelle *toise-toise-pieds*. On conçoit de même la toise-toise-pied, partagée en 12 parallélipipèdes, qui ont chacun une toise quarrée de base et un pouce de haut, et qu'on appelle *toise-toise-pouces*; on subdivise de même chacune de celles-ci, en 12 parallélipipèdes, qui ont chacun une toise quarrée de base, sur une ligne de haut; et on continue de subdiviser en parallélipipèdes, qui

Digitized by Google

ont constamment une toise quarrée de base, sûr un point, une prime, une seconde, etc. de haut; en sorte que les subdivisions sont absolument analogues à celle de la toise linéaire, comme nous avons vu que l'étoient celles de la toise quarrée; et les noms de ces différentes subdivisions, ne diffèrent de ceux qui sont relatifs à la toise quarrée, qu'en ce que le mot *toise* y est énoncé deux fois.

Les multiplications relatives à cette division de la toise-cube, sont absolument les mêmes que celles que nous avons enseignées, relativement à la toise quarrée.

A l'égard de la nature des unités des facteurs, on doit regarder l'un d'entr'eux comme exprimant des toises-cubes, toise-toise-pieds, toise-toise-pouces, etc. et les deux autres comme marquant des nombres abstraits, dont le produit exprimera combien de fois on doit répéter ce premier facteur.

Mais pour se guider plus aisément dans ces multiplications, on laissera aux facteurs les signes de la toise, tels qu'ils les ont; il suffit de savoir, que le produit doit être des toises-cubes, toises-toises-pieds, etc. ainsi, en opérant comme au toisé des surfaces; on trouvera comme il suit:

EXEMPLE.

On demande la solidité du même solide que ci-dessus, évaluée suivant cette seconde méthode.

	2^{T}	4^{P}	8^{p}	
	1^{T}	3^{p}		
	2.	4.	8	
Pour 3^{P} . . .	1.	2.	4	
	4^{TT}	1^{TP}	0^{Tp}	
	3^{T}	5^{P}	7	
	12.	3.	0	
Pour 3^{P} . . .	2.	0.	6	
Pour 2^{P} . . .	1.	2.	4	
Pour 6^{po} . . .	0.	2.	1	
Pour 1^{po} . . .	0.	0.	4.	2
Solidité. . . .	16^{TTT}	2^{TT}	3^{TTP}	2^{TTl}

261. Il est aisé de convertir ces parties de la toise, en parties-cubes ; c'est-à-dire, pieds-cubes, pouces-cubes, etc. Il faut écrire sous les parties de la toise, à commencer des toise-toise-pieds, les nombres 36, 3, $\frac{1}{4}$, 36, 3, $\frac{1}{4}$ consécutivement, et multiplier chaque nombre supérieur par son correspondant inférieur, porter les produits des nombres 36, 3, $\frac{1}{4}$, chacun au-dessous du premier de ces nombres, et lorsqu'en multipliant par $\frac{1}{4}$, il restera 1 ou 2 ou 3 ; on écrira sous le nombre 36 suivant, 432 ou 864 ou 1296, pour commen-

cer une seconde colonne; appliquant ceci à l'exemple que nous venons de donner.

16^{TTT}	2^{TTP}	3^{TTp}	2^{TTl}	0^{TTpt}
	36	3	$\frac{1}{4}$	36
16^{TTT}	72^{PPP}			864^{PPP}
	9			
16^{TTT}	81^{PPP}	864^{PPP}		

On trouve le même produit que par la première méthode.

On multiplie les toise-toise-pieds par 36, parce que la toise-toise pied ayant 1 pied de haut sur une toise quarrée ou 36 pieds quarrés de base, doit contenir 36 pieds-cubes. La toise-toise-pouce étant la douzième partie de la toise-toise-pied, doit contenir la douzième partie de 36 pieds-cubes; c'est-à-dire, 3 pieds-cubes; il faut donc multiplier par 3 les toise-toise-pouces; pareillement la toise-toise-ligne étant la douzième partie de la toise-toise pouce, doit contenir la douzième partie de 3 pieds-cubes ou un quart de pied-cube, ou (à cause que le pied-cube vaut 1728 pouces-cubes) elle doit contenir 432^{ppp}; en raisonnant de même, on voit que la toise-toise-point vaudroit 36^{ppp}, parce qu'elle est la douzième partie de la toise-toise-ligne, qui vaut 432^{ppp}, dont la douzième partie est 36; donc, etc.

Donc, réciproquement, pour ramener les parties cubes de la toise-cube, à des toise-toise-pieds, toise-toise-pouces, etc. il faudra diviser par 36, le nombre des pieds-cubes, et l'on aura les toises-toises-pieds : on divisera le reste de cette division

par 3; et l'on aura les toise-toise-pouces. On multiplera par 4 le reste de cette seconde division, et au produit on ajoutera 1 ou 2 ou 3 unités, selon que le nombre des pouces-cubes sera entre 432 et 864, ou 864 et 1296, ou 1296 et 1728, et l'on aura les toise-toise-lignes; puis retranchant du nombre des pouces-cubes le nombre 432 ou 892, ou 1296, selon qu'on aura ajouté 1, ou 2, ou 3 unités, on opérera sur le reste, comme on a opéré sur les pieds-cubes, et l'on aura consécutivement les toise-toise-points, les toise-toise-primes, et les toise-toise-secondes; enfin on continuera de la même manière pour les lignes cubes, etc.

Par exemple, si l'on demande de réduire en toise-toise-pieds, toise-toise-pouces, etc. le nombre 47^{TTT} 52^{PPP}, 932^{PPP}; je divise 52 par 36, et j'ai 1^{TTP}, et un reste de 16; je divise celui-ci par 3, et j'ai 5^{TTpo} et un reste de 1; je quadruple ce reste et j'y ajoute 2 unités, parce que le nombre des pouces-cubes est entre 864 et 1296, et j'ai 6^{TTl}. Retranchant 864, de 932, il reste 68; je le divise par 36, et j'ai 1^{TTpt}, et 32 de reste; je divise celui-ci par 3, et j'ai $10^{TT'}$, et 2 de reste; je quadruple ce reste, et j'ai $8^{TT''}$, en sorte que j'ai, en total, 47^{TTT} 1^{TTP} 5^{TTp} 1^{TTpt} $10^{TT'}$ $8^{TT''}$.

262. Si au lieu de rapporter la solidité à la toise-cube, on vouloit la rapporter au pied-cube, on le pourroit également, en concevant le pied-cube comme composé de douze parallélipipèdes, qui

Digitized by Google

ont tous 1 pied quarré de base, sur un pouce de hauteur chacun, et qu'on marqueroit ainsi *PPp*, pour exprimer *pied-pied-pouces ;* c'est ainsi que nous allons en user dans l'exemple suivant.

EXEMPLE appliqué à la solidité d'un Ponton.

Soit (*fig.* 133), la plus grande largeur *EH*, de	4^p	4^p
La plus petite *FG*, de.	4.	2.
Leur distance ou le creux du ponton.	2.	4.
La plus grande longueur *AI*.	18.	0.
La plus petite *CL*.	13.	4.
Donc $2AI + CL$.	49.	4.
Et $2CL + AI$.	44.	8.

Je calcule la surface du triangle *EHG*, et celle du triangle *FFG*, qui ont pour hauteur commune le creux du ponton, et je trouve comme il suit.

	4^p	4^p				4^p	2^p	
	2.	4.				2.	4.	
	8.	8.				8.	4.	
Pour 4^p.1.	5.	4.			Pour 4^p.1,	4.	8.	
Som.	10. 1.	4.			Som.	9.	8.	8.
Moitié	$5^{pp}0^{pp}8^{pl}$	Tr. *EHG*.			Moitié	$4^{pp}10^{pp}4^{pl}$	Tr. *EFG*.	

Je multiplie la première par $2AI + CL$, et la seconde par $2CL + AI$, et prenant le tiers du tout, j'ai la solidité du ponton, comme il suit.

	5^{PP}	0^{PP}	8^{Pl}	
	49	4		
	247.	8.	8.	
Pour 4^{P}.	1.	8.	2.	8.
Somme.	249^{PPP}	4^{PPp}	10^{PPl}	8^{PPpt}

	4^{PP}	10^{Pp}	4^{Pl}	
	44^{P}	8^{p}		
	213.	10.	8.	
Pour 6^{p}	2.	5.	2.	
Pour 2^{p}	0.	9.	8.	8.
Somme.	217^{PPP}	1^{PPp}	6^{PPl}	8^{pp}

Réunissant ces deux sommes, et prenant le tiers, on a 155^{PPP} 6^{PPp} 1^{PPl} 9^{PPpt} $4^{PP\prime}$ pour la solidité du ponton.

Exemple appliqué au toisé d'une Batterie.

Pour donner encore une application des prismes tronqués et du toisé, supposons que l'on demande la quantité de terre nécessaire à la construction de l'épaulement d'une batterie de quatre pièces de canon.

La longueur d'une pareille batterie est de 13^{T} 2^{P} par le bas. La hauteur de l'épaulement, en dedans, est ordinairement de 1^{T} 1^{P}, et en dehors elle est 1^{T} 0^{P} 4^{p}. Le talud intérieur est le tiers de la hauteur intérieure, et l'extérieur est la moitié de la hauteur extérieure; ainsi le premier est de 2^{P} 4^{P}, et le second de 3^{P} 2^{p}; la largeur de la base est de 3^{T} 5^{P} 6^{p}, ainsi la largeur au sommet extérieur de l'épaulement, est de 3^{T} 0^{P} 0^{p}. On donne aux deux côtés de l'épaulement le même talud qu'au dedans; c'est-à-dire, le tiers de la hauteur intérieure vers le dedans, et le tiers de la hauteur extérieure vers le dehors; ainsi la longueur intérieure de l'épaulement, vers le haut, est de 12^{T} 3^{P} 4^{p}, et sa longueur extérieure vers le haut, est de 12^{T} 3^{P} 9^{p} 4^{l}.

Ces dimensions établies, on peut considérer le massif de la batterie, (abstraction faite des embrasures) comme un prisme tronqué, dont la coupe faite perpendiculairement

Digitized by Google

à sa longueur, seroit le trapèze *EFGH*, (*figure* 134), dont

La base *HE* est de.	3^T	5^P	6^P
Le talud intérieur *HK*.	o.	2.	4
La hauteur *GK* de l'angle *G*.	1.	1.	o
Le talud extérieur *IE*.	o.	3.	2
La hauteur *IF* de l'angle *F*.	1.	o.	4

Et si on conçoit que cette coupe soit faite au milieu de la longueur, ce prisme total est partagé en deux prismes droits, tronqués, parfaitement égaux, et qui ont chacun pour base le trapèze *EFGH*. Si l'on imagine donc la diagonale *GE*, il suit de ce qui a été dit (254), qu'on aura la solidité d'une des moitiés, en multipliant le triangle *EFG* par le $\frac{1}{3}$ de la somme des trois arêtes, qui, d'un même côté, répondent aux angles *F*, *E*, *G*, y ajoutant le produit du triangle *EGH*, multiplié pareillement par la somme des trois arêtes, qui, du même côté, répondent aux angles *E*, *G*, *H*, et doublant le tout; mais puisque ces arêtes sont moitié des longueurs qui répondent à ces mêmes angles, ou des arêtes du prisme total, il s'ensuit que l'opération consiste à multiplier le triangle *EFG* par le tiers de la somme des trois arêtes totales qui répondent aux angles *E*, *F*, *G*, et le triangle *EGH* par le tiers de la somme de celles qui répondent aux trois angles *E*, *G*, *H*, et à ajouter ces deux produits.

Or ces arêtes sont respectivement comme il suit.

Arêtes	En *E*.	13^T	2^P	0^P	0^l
	En *G*.	12.	3.	4.	o
	En *F*.	12.	3.	9.	4
	En *H*.	13.	2.	o.	o

Digitized by Google

Le tiers des trois arêtes en *E*, *F*, *G*, sera donc.	12^{T}	5^{P}	0^{P}	5^{l}	4^{Pt}
Et le tiers des trois arêtes en *E*, *G*, *H*, sera.	13^{T}	0^{P}	5^{P}	4^{l}	

Il ne s'agit donc que d'avoir la surface du triangle *EFG*, et celle du triangle *EGH*; or la seconde est évidemment égale $\frac{HE \times GK}{2}$, et la première qui est la différence entre le quadrilatère *EFGH* et le triangle *EGH*, sera $EK \times \frac{1}{2} FI - EI \times \frac{1}{2} GK$, d'où et d'après les mesures ci-dessus, on trouvera, comme il suit.

Le triangle *EGH*.	2^{TT}	1^{TP}	8^{Tp}	6^{Tl}	0^{Tpt}
$EK \times \frac{1}{2} FI$.	1.	5.	2.	0.	8.
$EI \times \frac{1}{2} GK$.	0.	1.	10.	2.	0.
Triangle *EFG*.	1.	3.	3.	10.	8.

Donc le prisme correspondant au triangle *EGH*.	29^{TTT}	5^{TTP}	2^{TTp}	8^{TTl}	2^{TTpt}	$8^{TT'}$
Et le prisme correspondant au triangle *FGE*.	19.	5.	8.	7.	2.	1
Massif de batterie. .	49^{TTT}	4^{TTP}	11^{TTp}	5^{TTl}	4^{TTp}	$9^{TT'}$

A l'égard des embrasures, si l'on suppose que leur fond est horizontal, que l'ouverture intérieure est de deux pieds haut et bas; l'extérieure de 9^{P} en bas, et 12 pieds 6^{P} en haut; que la hauteur de l'embrasure est de 3^{P} 6^{P} du côté intérieur de la batterie; en concevant chacune coupée perpendiculairement à la longueur de la batterie, on verra que le profil peut en être représenté par le quadrilatère *FGDM*, dans lequel on aura *GO* de 3^{P} 6^{P}, *FN* de 2^{P} 10^{P}, et les taluds *DO* et *NM* seront; savoir, *DO* de 1^{P} 2^{P} et *NM* de 1^{P} 5^{P}; d'où on conclura que *DM* est de 3^{T} 8^{P} 7^{P}; et comme

comme le solide de l'embrasure est aussi un prisme tronqué, dont toutes les dimensions sont actuellement connues ; on conclura, par un calcul semblable au précédent, que le solide des quatre embrasures est de 6^{TTT} 3^{TTP} 1^{TTp} 6^{TTl} 3^{TTpt} $1^{TT'}$, lequel retranché du massif trouvé ci-dessus, il reste 43^{TTT} 1^{TTP} 9^{TTp} 9^{TTl} 1^{TTpt} $8^{TT'}$ pour la totalité des terres nécessaires à la construction de l'épaulement ; d'où il est facile de conclure le nombre de travailleurs nécessaires pour construire cette batterie, dans un temps déterminé, sachant par expérience que trois hommes, sans trop se fatiguer, peuvent creuser et rapporter sur la batterie une toise-cube en 18 heures.

263. Puisque, pour avoir la solidité d'un prisme, il faut multiplier la surface de sa base, par sa hauteur; il s'ensuit, que si connoissant la solidité et la base, ou la hauteur, on veut avoir la hauteur ou la base, il faut diviser la solidité par celui de ces deux facteurs que l'on connoîtra ; mais il faut observer que dans l'exactitude, ce n'est point véritablement la solidité que l'on divise par la surface ou par la hauteur ; mais c'est un solide que l'on divise par un solide ; en effet, d'aprés ce qui a été dit ci-dessus, on voit que lorsqu'on évalue un solide, on répète un autre solide de même base, autant de fois que la hauteur de celui-ci est contenue dans la hauteur du premier, ou bien on répète un solide de même hauteur, autant de fois que la surface de la base de celui-ci, est comprise dans la base de celui-là. Donc, quand

on voudra, connoissant la solidité, et la surface de la base, par exemple, connoître la hauteur; il faudra chercher combien de fois la solidité proposée contient celle d'un solide de même base, et qui a pour hauteur, l'unité; le quotient marquera par le nombre de ses unités, le nombre des parties de la hauteur.

Cela posé, si ayant, par exemple, un prisme dont la solidité soit de $16^{TTT}\ 2^{TTP}\ 3^{TTp}\ 0^{TTl}$, et la surface de la base, de $12^{TT}\ 0^{TP}\ 0^{Tp}$, on veut savoir quelle est la hauteur; on considérera le diviseur, non pas comme $12^{TT}\ 0^{TP}\ 0^{Tp}$, mais comme $12^{TTT}\ 0^{TTP}\ 0^{TTp}$, et alors la question se réduira à diviser $16^{TTT}\ 2^{TTP}\ 3^{TTp}\ 2^{TTl}$ par $12^{TTT}\ 0^{TTP}\ 0^{TTp}$; mais comme la toise quarrée est facteur commun, le quotient sera le même que si le dividende et le diviseur marquoient des toises linéaires; on aura donc simplement $16^{T}\ 2^{P}\ 3^{p}\ 2^{l}$, à diviser par $12^{T}\ 0^{P}\ 0^{p}$, c'est-à-dire par 12^{T}; et comme la nature de la question fait voir que le quotient doit être des toises linéaires, la division se fera donc selon la règle prescrite (*Arith.* 118 *et suiv.*).

Si la solidité et la hauteur étant données, on cherche quelle doit être la surface de la base; par exemple, si la solidité est de $16^{TTT}\ 2^{TTP}\ 3^{TTp}\ 2^{TTl}$, et la hauteur de $2^{T}\ 4^{P}\ 8^{p}$; on considérera le diviseur comme étant $2^{TTT}\ 4^{TTP}\ 8^{TTp}$; et par la même raison que dans le cas précédent, l'opération se réduira à diviser $16^{T}\ 2^{P}\ 3^{p}\ 2^{l}$, par $2^{T}\ 4^{P}\ 8^{p}$; mais comme le quotient doit évidemment être une surface, on le comptera, non pas pour des toises linéaires, mais pour des toises quarrées, toise-pieds, etc. du reste il n'y aura aucune différence dans la manière de faire l'opération qui se fera toujours en vertu des règles

Digitized by Google

données (*Arith.* 118 *et suiv.*), c'est-à-dire qu'après avoir trouvé le quotient, comme s'il devoit exprimer des toises linéaires, on affectera le signe de chaque partie de la lettre *T*. Par exemple, dans le cas présent, on trouveroit pour quotient $5^T\ 5^p\ 4^p\ 6^l$; on écrira donc $5^{TT}\ 5^{Tp}\ 4^{Tp}\ 6^{Tl}$.

Si la solidité étoit donnée en toises-cubes, et parties cubes de la toise-cube, on la convertiroit en toises-cubes, toise-toise-pieds, etc. par ce qui a été dit (261), et l'opération seroit ramenée au cas précédent.

Du Toisé des Bois.

264. Ce qu'on vient de dire du toisé en général, ne nous laisse que fort peu de chose à dire sur le toisé des bois.

Dans l'Artillerie et dans l'Architecture, l'usage est de réduire en solives.

Par *solive*, on entend un parallélipipède de deux toises de haut, sur 6 pouces d'équarrissage, ou 36 pouces quarrés de base ; ce qui est équivalent à un parallélipipède de une toise de haut sur $\frac{1}{2}$ pied quarré ou 72 pouces quarrés de base, et qui par conséquent contient 3 pieds-cubes.

On partage la solive en six parties, chacune d'un pied de haut et de 72 pouces quarrés de base, et chacune de ces parties, s'appelle *pied de solive*. On partage de même le pied de solive, en douze parties d'un pouce de haut et de 72 pouces quarrés de base chacune, qu'on appelle *pouces de solive*, et ainsi de suite.

Puisque la solive contient 3 pieds-cubes, ou la 72e partie d'une toise-cube, et que ses subdivisions sont les mêmes que celles de la toise-cube en toise-toise-pieds, etc. il s'ensuit que le nombre qui exprimeroit un solide quelconque, en solives et parties de solives, est 72 fois plus grand que celui qui l'exprimeroit en toises-cubes, toise-toise-pieds, etc.

D'après ces différentes manières d'envisager la solive, on peut facilement imaginer différentes méthodes pour toiser les bois en solives; nous nous bornerons à exposer la suivante.

Pour évaluer la solidité d'un corps en solives, il n'y a qu'à l'évaluer en toises-cubes, toise-toise-pieds, etc. et multiplier ensuite le produit par 72; mais on peut éviter cette multiplication en faisant une réflexion assez simple. Il n'y a qu'à regarder l'une des dimensions comme douze fois plus grande; c'est-à-dire, regarder les lignes comme exprimant des pouces, les pouces comme exprimant des pieds, et ainsi de suite. Regarder pareillement une autre des trois dimensions comme six fois plus grande, ou les lignes comme exprimant des demi-pouces, les pouces comme exprimant des demi-pieds; alors multipliant ces deux nouvelles dimensions entr'elles, et le produit par la troisième, on aura tout de suite la solidité en solives, pieds de solive, etc.

EXEMPLE.

On demande le nombre des solives et parties de solive d'une pièce de bois de $8^T\ 5^P\ 6^p$ de long sur $1^P\ 7^p$ de large, et $1^P\ 5^p$ d'épaisseur.

Au lieu de $1^P\ 7^p$ je prends. . . . . $3^T\ 1^P$ c'est-à-dire, douze fois plus.

Au lieu de $1^P\ 5^p$, je prends. . . . . . . $1^T\ 2^P\ 6^p$ c'est-à-dire, six fois plus.

Je multiplie ces deux dimensions l'une par l'autre;

1^T	2^P	6^p
3^T	1.	
4.	1.	6.
0.	1.	5.
4^{TT}	2^{TP}	11^{Tp}

Et je multiplie ce produit par la troisième dimension,

	4^{TT}	2^{TP}	11^{Tp}	
	8^T	5^P	6^p	
	35.	5.	4.	
Pour 3.	2.	1.	5.	6
Pour 2^P.	1.	2.	11.	8
Pour 6^p.	0.	2.	2.	11
	40^{TTT}	0^{TTP}	0^{TTp}	1^{TTl}

Et au lieu de compter ce produit en toises, je le compte en solives, et j'ai

$40^{\text{solives}}\ 0^{\text{pieds}}\ 0^{\text{pouces}}\ 1^{\text{ligne}}$,

dont les pieds, pouces et lignes expriment des pieds, pouces et lignes de solive.

265. Quelques toiseurs divisent autrement la solive. En se la représentant comme un parallélipipède de 2 toises de haut sur 36 pouces quarrés de base, ils la divisent en douze parties qu'ils appellent des pieds; ils divisent ce pied en 12 pouces, et le pouce en trois parties qu'ils appellent *chevilles*. Ainsi leur pied de solive est la moitié du pied de solive ordinaire; il en est de même du pouce, et chaque cheville vaut 2 lignes de solive.

266. Pour les bois qu'on reçoit dans l'Artillerie, on entend par équarrissage, le quarré inscrit au cercle qu'on a pris pour base dans un corps d'arbre non équarri ou en grume. Ce quarré, qui a pour diagonale le diamètre, est (168) la moitié du quarré du diamètre ou du quarré circonscrit. Comme les arbres vont en diminuant de grosseur à mesure qu'on s'éloigne du pied, on les regarde dans la pratique, comme des cylindres de même longueur que le corps de l'arbre, mais d'un diamètre égal à celui de l'arbre vers le milieu de sa hauteur. On diminue encore ce diamètre de quelques pouces par rapport à l'écorce et à l'aubier; mais cette diminution varie selon la nature des bois, et le pays.

Lorsqu'on a mesuré ce diamètre, on le rend 12 fois plus grand, et on le multiplie par ce même diamètre rendu six fois plus grand; la moitié de ce produit qu'on appelle *base de solive* du bois équarri, exprime en sous-entendant une toise de longueur, le nombre des solives et parties de solives que contient une toise de longueur de l'arbre équarri. En sorte que pour avoir le nombre total des solives de cet arbre, il ne s'agit plus que de multiplier par le nombre des toises et parties de toise de sa longueur,

Et pour avoir le nombre des solives du même arbre en *grume*, on multiplie le quarré du diamètre rendu 72 fois

Digitized by Google

plus grand comme il vient d'être dit, par $\frac{11}{7}$, et on en prend moitié ; ce qui donne la surface du cercle qui sert de base au cylindre dont la solidité est prise pour celle de l'arbre ; on appelle cette surface, *base de solive du bois en grume.* Enfin on multiplie cette base de solive par le nombre des toises et parties de toise de la longueur de l'arbre.

EXEMPLE.

On demande la base de solive tant équarrie, qu'en grume, pour un arbre de 25 pouces de diamètre.

A 25 pouces je substitue 25 pieds ou. . . . . 4^{T} 1^{P}.

D'un autre côté, à 25 pouces, je substitue 25 demi-pieds ou. 2^{T} 0^{P} 6^{p}.

Je multiplie l'un par l'autre, et j'ai. . . 8^{TT} 4^{TP} 1^{Tp}.

dont la moitié. . . . . 4^{TT} 2^{TP} 0^{Tp} 6^{Tl}.

comptée en solives, donne pour la base de solive équarrie. . . . . $4^{sol.}$ 2^{P} 0^{p} 6^{l}.

Puis pour avoir la base de solive en grume, je multiplie par $\frac{11}{7}$; la quantité 8^{TT} 4^{TP} 1^{Tp}, ce qui me donne. . . . . 13^{TT} 3^{TP} 10^{Tp} 2^{Tl}

dont la moitié. 6. 4. 11. 1

comptée en solives, donne pour la base de solive en grume. . . . . $6^{sol.}$ 4^{P} 11^{p} 1^{l}

Des Rapports des Solides en général.

267. *Comparer deux solides*, c'est chercher combien de fois le nombre de mesures d'une certaine espèce, contenues dans l'un de ces solides, contient le nombre de mesures de même espèce contenues dans l'autre.

Digitized by Google

268. *Deux prismes ou deux cylindres, ou un prisme et un cylindre, sont entr'eux comme les produits de leurs bases par leur hauteur.* Cela est évident, puisque chacun de ces solides, est égal au produit de sa base par sa hauteur, quelle que soit d'ailleurs la figure de la base.

Donc *les prismes ou les cylindres, ou les prismes et les cylindres de même hauteur sont entr'eux comme leurs bases; et les prismes et les cylindres de même base, sont entr'eux comme leurs hauteurs*; car le rapport des produits des bases par les hauteurs, ne change point lorsqu'on y omet le facteur commun qui s'y trouve lorsque la base ou la hauteur se trouve être la même dans les deux solides.

Donc *deux pyramides quelconques, ou deux cônes, ou une pyramide et un cône, sont dans le rapport des hauteurs, lorsque les bases sont égales*; car ces solides sont chacun le tiers d'un prisme de même base et de même hauteur.

269. *Les solidités des pyramides semblables, sont entr'elles comme les cubes des hauteurs de ces pyramides, ou en général, comme les cubes de deux lignes homologues de ces pyramides.*

Car deux pyramides semblables peuvent être représentées par deux pyramides telles que $IABCDF$, $Iabcdf$ (*fig.* 108), puisque ces deux pyramides sont composées d'un même

Digitized by Google

nombre de faces semblables chacune à chacune, et semblablement disposées. Puis donc que deux pyramides sont, en général, comme les produits de leurs bases, par leurs hauteurs, les bases qui sont ici des figures semblables, étant entr'elles comme les quarrés des hauteurs *IP*, *ip*, (202), les deux pyramides seront entr'elles comme les produits des quarrés des hauteurs, par les hauteurs mêmes; car on pourra (99) substituer au rapport des bases, celui des quarrés des hauteurs. Et puisque (199) les hauteurs sont proportionnelles à toutes les autres dimensions homologues, leurs cubes seront donc aussi proportionnels aux cubes de ces dimensions homologues (*Arith.* 181); donc en général deux pyramides semblables sont entr'elles comme les cubes de leurs dimensions homologues.

270. Donc *en général les solidités de deux corps semblables, sont entr'elles comme les cubes des lignes homologues de ces solides.* Car les solides semblables peuvent être partagés en un même nombre de pyramides semblables chacune à chacune; et comme deux quelconques de ces pyramides semblables seront entr'elles en même rapport, puisqu'elles sont entr'elles comme les cubes de leurs dimensions homologues, lesquelles sont en même rapport que deux autres dimensions homologues

quelconques ; il s'ensuit que la somme des pyramides du premier solide, sera à la somme des pyramides du second, aussi dans le même rapport des cubes des dimensions homologues.

Donc *les solidités des sphères sont entr'elles comme les cubes de leurs rayons ou de leurs diamètres.*

Ces principes peuvent servir à résoudre plusieurs questions de la nature des suivantes.

1°. *Connoissant le poids d'un pied cube de poudre, trouver le côté d'un fourneau cubique qui doit contenir un poids donné de poudre.*

Les poids de différens volumes d'une même espèce de matière étant proportionnels à ces volumes, sont proportionnels aux cubes de leurs dimensions, lorsqu'ils sont semblables.

Ainsi, supposant que le pied cube de poudre contienne $64^{liv.}$, si l'on veut avoir le côté d'un fourneau cubique contenant $10^{liv.}$ de poudre, on fera cette proportion, 64 : 10 comme le cube de 1 est à un quatrième terme qui sera le cube du côté cherché, lequel sera donc $\frac{10}{64}$, dont la racine cubique $\frac{2,154}{4}$ ou $0^p,538$ ou $0^p\ 6^p\ 5^l$ est le côté cherché.

Si dans cette opération on veut employer les logarithmes, au logarithme de 10, on ajoutera (*Arith.* 231) le complément arithmétique du logarithme de 64 ; ce qui donne 9,193820 à la caractéristique duquel (*Arith.* 231) j'ajoute 20, et prenant le tiers de la somme 29,193820, j'ai 9,731273 pour le logarithme de la racine cubique, ou du côté cherché. La caractéristique étant trop forte de 10 unités, je la diminue donc d'autant d'unités qu'il est nécessaire pour

Digitized by Google

trouver le reste dans les tables, et je trouve 5386 pour le nombre qui correspond au logarithme restant 3,731273 dont la caractéristique étant trop forte encore de 4 unités, me fait connoître que le nombre cherché, est à moins d'un dix-millième près, 0,5386 qui donne, comme ci-dessus 0^{p} $6^{po.}$ 5^{l}.

Dans l'exemple précédent, nous avons pris $64^{liv.}$ pour le poids d'un pied cube de poudre ; et ce l'est en effet, à peu près. Mais dans les charges des fourneaux on ne doit pas compter sur ce pied, à cause de la paille, des sacs à terre, etc. qu'on emploie nécessairement. Mais en supposant qu'on emploie toujours de ces derniers, proportionnellement à la quantité de poudre, il suffit de savoir une fois pour toutes, quel est le poids de la poudre qui entre dans un fourneau d'un pied cubique, pour pouvoir déterminer de la même manière le côté de tout autre fourneau qui contiendroit un poids connu de poudre, avec les autres matières qui doivent y entrer.

2°. *Connoissant les poids de deux boulets, et le diamètre de l'un ; pour avoir le diamètre de l'autre, on se conduira comme il suit.*

Par exemple, le diamètre du boulet de 24, est de 5^{p} 5^{l} $4^{pts.}$ ou $5^{p},444$; on demande le diamètre du boulet de 12.

Les solidités doivent donc être :: 24 : 12 ou :: 2 : 1. Donc les cubes des diamètres doivent aussi être :: 2 : 1 ; ainsi du triple du logarithme de 5,444, je retranche le logarithme de 2, et j'ai 1,906724 dont le tiers 0,635575 cherché avec une caractéristique plus forte de trois unités, répond à 4321 ; donc le diamètre cherché, est de $4^{p},321$ ou 4^{p} 3^{l} $10^{pts.}$

Si l'on n'avoit pas de tables de logarithmes, on cu-

beroit $5^{p},444$, et l'ayant divisé par 2, on extrairoit la racine cubique du quotient.

Par les mêmes principes, on peut résoudre les deux questions suivantes; mais le principe donné (246) peut en fournir encore une solution plus facile, comme il suit.

Trouver le diamètre d'une sphère qui auroit une solidité connue. Par exemple, pour faire une sphère qui contienne 10 pieds cubes de matière; on fera cette proportion, 11 : 21 :: 10 est à un quatrième terme qui sera le cube du diamètre cherché; extrayant donc la racine cubique de ce quatrième terme, on aura le diamètre.

Si on opère par logarithmes, on trouvera comme il suit. . . . .

Log. 10.	1,000000.
Log. 21.	1,322219.
Somme.	2,322219.
Log. 11.	1,041393.
Reste.	1,280826.
dont le tiers.	0,426942.

étant cherché avec une caractéristique plus forte de trois unités, donne $2^{p},673$ ou $2^{p}\ 8^{p}\ 0^{l}\ 11^{pts}$ pour le diamètre cherché.

Le même principe peut être employé à *déterminer le diamètre des balles de plomb suivant leur nombre à la livre.*

Par exemple, sachant que le pied cube de plomd pèse $828^{liv.}$, on demande le diamètre d'une balle de 16 à la livre.

Puisqu'il doit y en avoir 16 dans la livre, il y en aura donc 16 fois 828 ou 13248 dans un pied cube; la solidité de chacune sera donc la $\frac{1}{13248}^{e}$. partie d'un pied cube. Je fais donc cette proportion 11 : 21 :: $\frac{1}{13248}$ est à un qua-

trième terme qui sera le cube du diamètre cherché ; ou bien réduisant le pied cube en lignes cubes, je fais cette proportion $11 : 21 :: \frac{1728 \times 1728}{16 \times 828}$ est à un quatrième terme qui sera $\frac{1728 \times 1728 \times 21}{16 \times 828 \times 11}$.

Opérant par logarithmes. . . . . .

Log. 16. . . .	1,204120	Log. $\overline{1728}^2$. . .	6,475088
Log. 828. . . .	2,918030	Log. 21. . . .	1,322219
Log. 11. . . .	1,041393	Somme.	7,797307
Somme	5,163543		5,163543
		Diff. des 2 Som.	2,633764
		dont le tiers. . .	0,877921

étant cherché avec une caractéristique plus forte de deux unités seulement, donne $7^l,55$ ou 7^l $6^{pts.}$ $\frac{3}{5}$ pour le diamètre de chaque balle.

Donc, en se rappelant tout ce qui a précédé, on voit 1°. que les contours des figures semblables, sont dans le rapport simple des lignes homologues. 2°. Que les surfaces des figures semblables, sont entr'elles comme les quarrés des côtés ou des lignes homologues. 3°. Que les solidités des corps semblables, sont entr'elles comme les cubes des lignes homologues.

Ainsi, si deux corps semblables, deux sphères, par exemple, avoient leurs diamètres dans le rapport de 1 à 3, les circonférences de leurs grands cercles seroient aussi dans le rapport de 1 à 3 ; les surfaces de ces sphères seroient comme 1 à 9, et les solidités comme 1 à 27 ; c'est-à-dire,

que la circonférence d'un des grands cercles de la seconde vaudroit trois fois celle d'un des grands cercles de la première; la surface de la seconde vaudroit neuf fois celle de la première; et enfin la seconde sphère vaudroit 27 sphères telles que la première.

Puisque les surfaces des corps semblables sont entr'elles comme les quarrés des lignes homologues; les lignes homologues seront donc entr'elles comme les racines quarrées de ces surfaces; et les solides qui sont comme les cubes des lignes homologues, seront donc comme les cubes des racines quarrées des surfaces. Les surfaces seront donc aussi, entre elles, comme les quarrés des racines cubiques des solidités.

DE LA

TRIGONOMÉTRIE PLANE.

271. LA *Trigonométrie plane* est une partie de la Géométrie, qui enseigne à déterminer ou à calculer trois des six parties d'un triangle rectiligne, par la connoissance des trois autres parties, lorsque cela est possible.

Je dis, lorsque cela est possible, parce que si l'on ne connoissoit que les trois angles, par exemple, on ne pourroit pas déterminer les côtés. En effet, si par un point *P* pris à volonté sur le côté *AB* du triangle *ABC*, (*fig.* 135) dont je suppose qu'on connoisse les trois angles, on mène *PE* parallèle à *AC*, on aura un autre triangle *APE* qui aura les mêmes angles que les triangles *ABC*; et on voit qu'on en peut former ainsi une infinité d'autres qui auront les mêmes angles. Il faudroit donc que le calcul donnât tout à la fois une infinité de côtés differens.

La question est donc alors absolument indéterminée. Nous verrons, cependant, que si l'on ne peut déterminer les valeurs des côtés, on peut du moins, déterminer leur rapport.

Mais lorsque parmi les trois choses connues ou

Digitized by Google

données, il entrera un côté, on peut toujours déterminer tout le reste. Il y a cependant un cas où il reste quelque chose d'indéterminé : le voici.

Supposé que dans le triangle *ABC*, (*fig.* 135) on connoisse les deux côtés *AB* et *BC*, et l'angle *A* opposé à l'un de ces côtés, on ne peut déterminer la valeur de l'angle *C* ni celle du côté *AC*, qu'autant qu'on saura si cet angle *C* est aigu ou obtus; en effet, si l'on conçoit que du point *B* comme centre et d'un rayon égal au côté *BC*, on ait décrit un arc *CD*, et que du point *D* où cet arc rencontre *AC*, on ait tiré *BD*; on aura un nouveau triangle *ABD*, dans lequel on connoîtra les mêmes choses qu'on connoît dans le triangle *ABC*, savoir, l'angle *A*, le côté *AB*, et le côté *BD* égal à *BC*; on a donc ici les mêmes choses pour déterminer l'angle *BDA*, qu'on avoit dans le triangle *ABC* pour déterminer l'angle *C*.

Mais il y a cette différence entre ce cas-ci et le précédent, qu'on peut ici assigner la valeur de l'angle *C* et de l'angle *BDA*, comme nous le verrons ci-après : la seule chose qui soit indéterminée, c'est de savoir laquelle de ces deux valeurs on doit adopter, et par conséquent quelle figure doit avoir le triangle. Il faut donc, outre les trois choses données, savoir encore si l'angle cherché doit être aigu ou obtus. Au reste on peut remarquer, en passant, que les deux angles *C* et *BDA*

dont

Digitized by Google

dont il s'agit, sont supplément l'un de l'autre; car *BDA* est supplément de *BDC* qui est égal à l'angle *C*, parce que le triangle *BDC* est isocèle.

272. Ce ne sont pas les angles mêmes qu'on emploie dans le calcul des triangles : on substitue aux angles, des lignes qui, sans leur être proportionnelles, sont néanmoins propres à représenter ces angles, et sont d'ailleurs plus commodes à employer dans le calcul, parce que, comme nous le verrons ci-après, elles sont proportionnelles aux côtés des triangles; il convient donc, avant que d'aller plus loin, de faire connoître ces lignes et de faire voir comment elles peuvent tenir lieu des angles.

Des Sinus, Cosinus, Tangentes, Cotangentes, Sécantes et Cosécantes.

273. La perpendiculaire *AP* (*fig.* 136) abaissée de l'extrémité d'un arc *AB* sur le rayon *BC* qui passe par l'autre extrémité *B* de cet arc, s'appelle le *sinus droit*, ou simplement le *sinus* de l'arc *AB* ou de l'angle *ACB*.

La partie *BP* du rayon, comprise entre le sinus et l'extrémité de l'arc, s'appelle le *sinus-verse*.

La partie *BD* de la perpendiculaire à l'extrémité du rayon, interçeptée entre ce rayon *BC* et

le rayon *CA* prolongé, s'appelle la *tangente* de l'arc *AB* ou de l'angle *ACB*.

La ligne *CD*, qui n'est autre chose que le rayon *CA* prolongé jusqu'à la tangente, s'appelle *sécante* de l'arc *AB* ou de l'angle *ACB*.

Si l'on mène le rayon *CF* perpendiculaire à *CB*, et à son extrémité *F* la perpendiculaire *FE* qui rencontre en *E* le rayon *CA* prolongé, et qu'enfin on mène *AQ* perpendiculaire sur *CF*; il suit des définitions précédentes, que *AQ* sera le sinus, *FQ* le sinus-verse, *FE* la tangente, et *CE* la sécante de l'arc *AF* ou de l'angle *ACF*.

Mais comme l'angle *ACF* est complément de *ACB*, puisque ces deux angles font ensemble un angle droit, on peut dire que *AQ* est le sinus du complément; *FQ* le sinus-verse du complément; *FE*, la tangente du complément; et *CE*, la sécante du complément de l'arc *AB*, ou de l'angle *ACB*.

Pour abréger ces dénominations, on est convenu de dire *cosinus*, au lieu de sinus du complément; *cosinus-verse*, au lieu de sinus-verse du complément; *cotangente*, au lieu de tangente du complément; et *cosécante*, au lieu de sécante du complément. En sorte que les lignes *AQ*, *FQ*, *FE*, *CE*, seront dites le cosinus, le cosinus-verse, la cotangente, et la cosécante de l'arc *AB* ou de l'angle *ACB*; de même les lignes *AP*, *BP*, *BD* et *CD*

Digitized by Google

pourront être dites le cosinus, le cosinus-verse, la cotangente, et la cosécante de l'arc *AF* ou de l'angle *ACF*; car *AB* est complément de *AF*, comme *AF* l'est de *AB*.

Pour désigner ces lignes, lorsqu'il sera question d'un angle ou d'un arc, nous mettrons devant les lettres qui servent à nommer cet angle ou cet arc, les expressions abrégées, *sin. cos. tang. cot.* Ainsi *sin. AB* signifiera le sinus de l'arc *AB*; *sin. ACB*, signifiera le sinus de l'angle *ACB*; de même *cos. AB*, *cos. ACB*, signifieront le cosinus de l'arc *AB*, le cosinus de l'angle *ACB*; et pour désigner le rayon, nous prendrons la lettre *R*.

274. Il est évident, 1°. que le *cosinus* AQ *d'un arc quelconque* AB *est égal à la partie* CP *du rayon, comprise entre le centre et le sinus.*

2°. Que *le sinus-verse* BP *est égal à la différence entre le rayon et le cosinus.*

3°. Que *le sinus d'un arc quelconque* AB, *est la moitié de la corde* AG *d'un arc double* ABG. Car le rayon *CB* étant perpendiculaire sur la corde *AG*, divise cette corde et son arc en deux parties égales (52).

275. De cette dernière proposition, il suit que *le sinus de 30 degrés, vaut la moitié du rayon*; car il doit être la moitié de la corde de 60 degrés,

Digitized by Google

ou du côté de l'exagone, que nous avons vu (93) être égal au rayon.

276. *La tangente de 45 degrés est égal au rayon.* Car si l'angle *ACB* est de 45 degrés, comme l'angle *CBD* est droit, l'angle *CDB* vaudra aussi 45 degrés; le triangle *CBD* sera donc isocèle, et par conséquent *BD* sera égal à *CB*.

277. A mesure que l'arc *AB* ou l'angle *ACB* augmente, son sinus *AP* augmente, et son cosinus *AQ* ou *CP* diminue, jusqu'à ce que l'arc *AB* soit devenu de 90 degrés; alors les inus *AP* devient *FC*, c'est-à-dire, égal au rayon, et le cosinus est zéro, parce que le point *A* tombant en *F*, la perpendiculaire *AQ* devient zéro.

A l'égard de la tangente *BD*, et de la cotangente *FE*, il est visible que la tangente *BD* augmente continuellement, et que la cotangente, au contraire, diminue; mais, l'une et l'autre, de manière que quand l'arc *AB* est devenu de 90 degrés, sa tangente est infinie, et sa cotangente est zéro : en effet, plus l'arc *AB* devient grand, plus le point *D* s'élève au-dessus de *BC*, et quand le point *A* est infiniment près de *F*, les deux lignes *CD* et *BD* sont presque parallèles, et ne se rencontrent plus qu'à une distance infinie; donc *BD* est alors infinie; donc elle l'est quand le point *A* tombe sur le point *F*.

Digitized by Google

278. Ainsi *pour l'arc de 90 degrés, le sinus est égal au rayon, le cosinus est zéro, la tangente est infinie, et la cotangente est zéro.*

Comme le sinus de 90 degrés est le plus grand de tous les sinus, on l'appelle, pour le distinguer des autres, *sinus total*; en sorte que ces trois expressions, le *sinus de* 90 *degrés*, le *rayon*, le *sinus total*, signifient la même chose.

279. Lorsque l'arc AB passe 90^d (*fig.* 137) son sinus AP diminue, et son cosinus AQ ou CP, qui tombe alors au-delà du centre par rapport au point B, augmente jusqu'à ce que l'arc AB soit devenu de 180 degrés, auquel cas le sinus est zéro, et le cosinus est égal au rayon. On voit aussi que le sinus AP, et le cosinus CP de l'arc AB, ou de l'angle ACB plus grand que 90 degrés, appartiennent en même temps à l'arc AH ou à l'angle ACH moindre que 90 degrés et supplément de celui-là; de sorte que, *pour avoir le sinus et le cosinus d'un angle obtus, il faut prendre le sinus et le cosinus de son supplément.* Mais il faut bien remarquer que le cosinus tombe du côté opposé à celui où il tomberoit, si l'arc AB ou l'angle ACB étoit moindre que 90 degrés.

A l'égard de la tangente, comme elle est déterminée (273) par la rencontre de la perpendiculaire BD (*fig.* 136) avec le rayon CA prolongé, il est

Digitized by Google

visible que lorsque l'arc AB (*fig.* 137) est de plus de 90 degrés, elle est alors BD; mais en élevant la perpendiculaire HI, il est aisé de voir que le triangle CBD est égal au triangle CHI, et que par conséquent BD est égal à HI.

280. Donc *la tangente d'un arc ou d'un angle plus grand que 90 degrés, est la même que celle du supplément de cet arc :* toute la différence qu'il y a, c'est qu'elle tombe au-dessous du rayon BC. Pour la cotangente EF, elle est aussi la même que la cotangente du supplément; et elle tombe aussi du côté opposé à celui où elle tomberoit, si l'arc AB ou l'angle ACB étoit moindre que 90 degrés. On voit encore, et par la même raison que ci-dessus, que pour 180 degrés, la tangente est zéro, et la cotangente infinie.

Des Tables des Sinus, Tangentes, etc.

281. Concevons que le quart de circonférence BF (*fig.* 136) soit divisé en arcs de 1′, c'est-à-dire, en 5400 parties égales, et que de chaque point de division, on abaisse des perpendiculaires ou sinus tels que AP, sur le rayon BC; concevons aussi ce rayon BC divisé en un très-grand nombre de parties égales, en 100000, par exemple; chaque perpendiculaire contiendra un certain nombre de ces parties du rayon : si donc, par quelque

Digitized by Google

moyen que ce soit, on pouvoit parvenir à déterminer le nombre de parties de chacune de ces perpendiculaires, il est visible que ces lignes pourroient être employées pour fixer la grandeur des angles; en sorte que si ayant écrit par ordre, dans une colonne, toutes les minutes depuis zéro jusqu'à 90 degrés, on écrivoit dans une colonne à côté et vis-à-vis de chaque minute, le nombre de parties de la perpendiculaire correspondante, on pourroit, par le moyen de cette table, assigner quel est le nombre de degrés d'un angle dont le nombre de parties de la perpendiculaire ou du sinus, seroit connu; et réciproquement, connoissant le nombre des degrés et parties de degrés de l'angle, on pourroit assigner le nombre des parties de son sinus. Cette Table auroit cette utilité, non seulement pour tous les arcs ou angles dont le rayon auroit le même nombre de parties qu'on en auroit supposé à celui d'après lequel on a construit la table, mais encore pour tout autre, dont le rayon seroit connu; par exemple, supposons un angle *DCG* (*fig.* 143) dont le côté ou rayon *CD* soit de 8 pieds, et la perpendiculaire *DE*, de 3 pieds; et imaginons que *CA* soit le rayon sur lequel on a calculé les tables; si l'on imagine l'arc *AB* et la perpendiculaire *AP*, cette perpendiculaire sera le sinus des tables; or je puis trouver aisément de combien de parties est cette perpendiculaire;

car comme les triangles *CDE*, *CAP* sont semblables (à cause des parallèles *DE* et *AP*), j'aurai *CD* : *DE* :: *CA* : *AP*, c'est-à-dire, $8^{p'}$: 3^{p} :: 100000 : *AP*; je trouverai donc (*Arith.* 169) que *AP* vaut 37500; je n'aurai donc qu'à chercher ce nombre dans la table parmi les sinus, et je trouverai à côté, le nombre des degrés et minutes de l'angle *DCG* ou *DCE*.

Réciproquement si l'on donnoit le nombre des degrés et minutes de l'angle *DCG* et son rayon *CD*, on détermineroit de même la valeur de la perpendiculaire *DE*; car sachant quel est le nombre de degrés et minutes de cet angle, on trouveroit dans la table, quel est le nombre de parties de la perpendiculaire ou du sinus *AP* qui répond à ce nombre de degrés; et alors, en vertu des triangles semblables, *CAP*, *CDE*, on auroit cette proportion *CA* : *AP* :: *CD* : *DE*, par laquelle il seroit facile de calculer *DE*, puisque les trois premiers termes *CA*, *AP* et *CD* sont connus, savoir *CA* et *AP* par les tables, et *CD* est donné en pieds.

On voit par-là quelles sont ces lignes que nous avons dit ci-dessus (272) pouvoir être substituées aux angles, dans le calcul des triangles; ce sont les sinus.

282. Mais les sinus ne sont pas les seules lignes

qu'on emploie : on fait usage aussi des tangentes et même des sécantes. Ces lignes sont faciles à calculer quand une fois on a calculé tous les sinus ; car comme le triangle *CPA* et le triangle *CBD* (*fig.* 136) sont semblables, on en peut tirer ces deux proportions :

$$CP : PA :: CB : BD$$

$$\text{et } CP : CA :: CB : CD,$$

c'est-à-dire (en faisant attention que *CP* est égale à *AQ*)

$$\cos. AB : \sin. AB :: R : \text{tang}. AB$$

$$\text{et } \cos. AB : R :: R : \text{sec}. AB$$

Or on voit que dans chacune de ces deux proportions, les trois premiers termes sont connus, lorsqu'on connoît tous les sinus ; puisque le cosinus d'un arc n'est autre chose que le sinus du complément de cet arc : il sera donc aisé d'en conclure (*Arith.* 169) la valeur du quatrième terme de chacune, et par conséquent des tangentes et des sécantes, et par conséquent aussi des cotangentes et des cosécantes, qui ne sont autre chose que des tangentes et des sécantes de complément.

Les livres qui renferment les valeurs de toutes les lignes dont il vient d'être question, sont ce qu'on appelle des *Tables de Sinus ;* elles renferment ordinairement, non-seulement les valeurs numériques de toutes ces lignes, mais encore leurs logarithmes qu'on emploie aussi souvent qu'on le peut, à la

place des valeurs numériques. Voyons actuellement les principes sur lesquels ces tables sont calculées.

283. *Pour avoir le cosinus d'un arc dont le sinus est connu, il faut retrancher le quarré du sinus, du quarré du rayon, et tirer la racine quarrée du reste.* Car le cosinus *AQ* (*fig.* 136) est égal à *PC* qui est côté de l'angle droit dans le triangle rectangle *APC*, dont on connoît alors l'hypothénuse *AC* et le côté *AP* (165).

Ainsi si l'on demandoit le cosinus de 30 degrés ; comme nous avons vu (275) que le sinus de cet arc est la moitié du rayon que nous supposerons ici de 100000 parties, ce sinus seroit 50000 ; retranchant son quarré, 2500000000 du quarré 10000000000 du rayon, on a 7500000000, dont la racine quarrée 86603 est le cosinus de 30 degrés, ou le sinus de 60 degrés.

284. *Connoissant le sinus d'un arc* AB (fig. 138) *pour avoir celui de sa moitié*, il faut d'abord calculer le cosinus *CP* de ce premier arc ; ce cosinus étant calculé, on le retranchera du rayon, ce qui donnera le sinus-verse *BP* : on quarrera la valeur de *BP*, et on ajoutera ce quarré avec celui du sinus *AP*; la somme (164) sera le quarré de la corde *AB*; tirant la racine quarrée de cette somme, on aura *AB*, dont la moitié est le sinus *BI* de l'arc *BD* moitié de *AB* (274).

Digitized by Google

285. *Connoissant le sinus* BI *d'un arc* BA (fig. 139) *pour trouver le sinus* DP *du double* BAD *de cet arc*, on calculera le cosinus *CI* de *BA*, et on fera cette proportion, *R* : *cos. BA* :: 2 *sin. BA* : *sin. BAD*, dans laquelle les trois premiers termes seront alors connus, et dont il sera facile de calculer le quatrième.

Cette proportion est fondée sur ce que les deux triangles *CBI* et *BDP* sont semblables; parce qu'outre l'angle droit en *P* et en *I*, ils ont d'ailleurs l'angle *B* commun; ainsi on a *CB* : *CI* :: *DB* : *DP*. Or *CI* (273) est le cosinus de *BA*, et *DB* le double de *BI* sinus de *BA*; *DP* est le sinus de *BAD*; et *CB* est le rayon; donc *R* : *cos. BA* :: 2 *sin. BA* : *sin. BAD*.

286. *Connoissant les sinus des deux arcs* AB, AC (fig. 140), *pour trouver le sinus de leur somme ou de leur différence;* il faut, après avoir calculé (283) les cosinus de ces mêmes arcs, multiplier le sinus du premier par le cosinus du second, et le sinus du second par le cosinus du premier. La somme de ces deux produits, divisée par le rayon, sera le sinus de la somme des deux arcs; et la différence de ces mêmes produits, divisée par le rayon, sera le sinus de la différence de ces mêmes arcs.

Faites l'arc *AD* égal à l'arc *AC*, tirez la corde *CD*, le rayon *LA* qui divisera cette corde en deux

parties égales au point I; des points C, A, I et D, abaissez les perpendiculaires CK, AG, IH, DF, sur BL; enfin des points I et D menez IM et DN, parallèles à BL. Puisque CD est divisée en deux parties égales en I, CN sera aussi divisée en deux parties égales en M (102).

Cela posé, CK qui est le sinus de BC somme des deux arcs, est composé de KM et de MC, ou de IH et de MC. DF qui est le sinus de BD différence des deux arcs, est égal à KN qui vaut KM moins MN, c'est-à-dire IH moins CM; ainsi pour trouver le sinus de la somme, il faut ajouter la valeur de MC à celle de IH; et au contraire l'en retrancher pour avoir le sinus de la différence.

Or les triangles semblables LAG, LIH donnent $LA : LI :: AG : IH$, c'est-à-dire, $R : cos. AC :: sin. AB : IH$; donc (*Arith.* 169) IH vaut $\frac{sin. AB \times cos. AC}{R}$.

Les triangles LAG et CIM semblables, parce qu'en vertu de la construction qu'on a faite, ils ont les côtés perpendiculaires l'un à l'autre, donnent $LA : LG :: CI : MC$ ou $R : cos. AB :: sin. AC : MC$; donc MC vaut $\frac{sin. AC \times cos. AB}{R}$; donc il faut ajouter $\frac{sin. AB \times cos. AC}{R}$ avec $\frac{sin. AB \times cos. AC}{R}$ pour avoir le sinus de la somme, et l'en retran-

Digitized by Google

cher au contraire, pour avoir le sinus de la différence.

287. *Pour avoir le cosinus de la somme ou de la différence de deux arcs dont on connoît les sinus;* il faut, après avoir calculé (283) les cosinus de chacun de ces deux arcs, multiplier ces deux cosinus l'un par l'autre; multiplier pareillement les deux sinus; alors retranchant le second produit du premier, et divisant le reste par le rayon, on aura le cosinus de la somme des deux arcs. Au contraire, pour avoir celui de la différence, on ajoutera les deux produits, et on en divisera la somme, par le rayon. Car puisque DC est coupée en deux parties égales en I, FK sera coupée en deux parties égales en H; or LK qui est le cosinus de la somme, vaut LH moins HK, ou LH moins IM; et LF qui est le cosinus de la différence, vaut LH plus HF, ou LH plus HK, ou enfin LH plus IM: voyons donc quelles sont les valeurs de LH et de IM.

Les triangles semblables LGA, LHI donnent $LA : LI :: LG : LH$,

C'est-à-dire, $R : \cos. AC :: \cos. AB : LH$;

Donc LH vaut $\frac{\cos. AC \times \cos. AB}{R}$.

Les triangles semblables LAG, CIM donnent $LA : AG :: CI : IM$,

C'est-à-dire, $R : sin. AB :: sin. AC : IM$;

Donc IM vaut $\frac{\sin. AB \times \sin. AC}{R}$.

Il faut donc pour avoir le cosinus de la somme, retrancher $\frac{\sin. AB \times \sin. AC}{R}$ de $\frac{\cos. AB \times \cos. AC}{R}$; et au contraire, l'ajouter pour avoir le cosinus de la différence.

288. *La somme des sinus des deux arcs* AB, AC (fig. 141) *est à la différence de ces mêmes sinus, comme la tangente de la moitié de la somme de ces deux arcs, est à la tangente de la moitié de leur différence*, c'est-à-dire, que *sin.* AB + *sin.* AC : *sin.* AB — *sin.* AC :: *tang.* $\frac{AB + AC}{2}$: *tang.* $\frac{AB - AC}{2}$.

Après avoir tiré le diamètre AM, portez l'arc AB de A en D; tirez la corde BD qui sera perpendiculaire sur AM. Par le point C, tirez CP perpendiculaire, et CF parallèle à AM. Du point F, menez les cordes FB et FD, et d'un rayon FG égal à celui du cercle BAD, décrivez l'arc IGK rencontrant CF en G, et en ce point G, élevez HL perpendiculaire à CF; les lignes GH et GL sont les tangentes des angles GFH et GFL, ou CFB et CFD qui ayant leurs sommets à la circonférence, ont pour mesure la moitié des arcs CB, CD sur lesquels ils s'appuient (63), c'est-à-

Digitized by Google

dire, la moitié de la différence *BC*, et la moitié de la somme *CD* des deux arcs *AB*, *AC*; ainsi *GL* et *GH* sont les tangentes de la moitié de la somme, et de la moitié de la différence de ces mêmes arcs.

Cela posé, il est visible que *DS* étant égal à *BS*, la ligne *DE* vaut $BS + SE$ ou $BS + CP$, c'est-à-dire, la somme des sinus des arcs *AB*, *AC*; pareillement *BE* vaut $BS - SE$ ou $BS - CP$, c'est-à-dire, la différence des sinus de ces mêmes arcs. Or, à cause des parallèles *BD*, *HL*, on a (115) $DE : BE :: LG : GH$.

Donc $\sin. AB + \sin. AC : \sin. AB - \sin. AC :: \tang. \frac{AB + AC}{2} : \tang. \frac{AB - AC}{2}$.

289. C'est d'après ces principes que l'on peut construire une table des sinus.

En effet, on connoît le sinus de 30^d par ce qui a été dit (275); et par ce qui a été dit (284), on peut trouver celui de 15^d, et successivement ceux de $7^d\,30'$, $3^d\,45'$, $1^d\,52'\,30''$, $0^d\,56'\,15''$, $0^d\,28'\,7''\,30'''$, $0^d\,14'\,3''\,45'''$, $0^d\,7'\,1''\,52'''\,30^{IV}$.

Cela posé, on remarquera que quand les arcs sont fort petits, ils ne diffèrent pas sensiblement de leurs sinus, et sont par conséquent proportionnels à ces sinus; ainsi pour trouver le sinus de $1'$, on fera cette proportion, *l'arc de* $0^d\,7'\,1''\,52'''\,30^{IV}$, *est à l'arc de* $0^d\,1'$, *comme le sinus de ce premier arc est au sinus de* $1'$.

Si dans ce calcul on suppose le rayon de 100000 parties seulement, il faudra calculer les sinus des arcs que nous

venons de rapporter, avec trois, et même quatre décimales, pour être en droit d'en conclure les suivans, à moins d'une unité près; ces décimales ne seront d'usage que pour le calcul des sinus des autres arcs, et on les supprimera quand tout le calcul sera fini.

Depuis 1' jusqu'à $3^d\ 0'$, il suffira de multiplier le sinus de 1' successivement par 2, 3, 4, 5, etc. pour avoir les sinus de 2', 3', etc. jusqu'à 3^d, à beaucoup moins d'une unité près.

Pour calculer les sinus des arcs au-dessus de $3^d\ 0'$, on fera usage de ce qui a été dit (286); mais on abrégera considérablement le travail en ne calculant les sinus, par ce principe, que de degrés en degrés seulement. Quant aux minutes intermédiaires, on y satisfera en prenant la différence des sinus de deux degrés consécutifs, et formant cette proportion, *soixante minutes sont au nombre de minutes dont il s'agit, comme la différence des sinus des deux degrés voisins est à un quatrième terme*, qui sera ce qu'on doit ajouter au plus petit des deux sinus, pour avoir le sinus du nombre de degrés et minutes dont il s'agit. Par exemple, si après avoir trouvé que les sinus de 8^d et de 9^d, sont 13917 et 15643, je voulois avoir le sinus de $8^d\ 17'$; je prendrois la différence 1726 de ces sinus, et je calculerois le quatrième terme d'une proportion dont les trois premiers sont 60' : 17' :: 1726 :

Ce quatrième terme, qui est 489, à très-peu près, étant ajouté à 13917 donne 14406 pour le sinus de $8^d\ 17'$, tel qu'il est dans les tables, à moins d'une unité près.

La raison de cette pratique est fondée sur ce que, lorsque l'arc KL (*fig.* 122) est petit, comme de 1^d, par exemple, les différences LM, Iu des sinus LF, IH, sont à-peu-près proportionnelles aux différences KL, KI, des arcs correspondans AL, AI, parce que les triangles KML, KuI

Digitized by Google

KuI pouvant être considérés comme rectilignes, sont semblables.

290. Cette méthode ne doit cependant être employée que jusqu'à 87^d. Passé ce terme, on ne peut se permettre de prendre iu (*fig.* 142) pour la différence des sinus PB, Qx, parce que la quantité ux, toute petite qu'elle est, a un rapport sensible avec iu, et d'autant plus sensible que l'arc AB approche plus de 90^d. Dans ce cas il faut se rappeler que (173) les lignes DE, Dt qui sont les différences entre le rayon et les sinus PB, Qx, sont proportionnels aux quarrés des cordes DB et Dx, ou (à cause que les arcs DB et Dx sont fort petits) aux quarrés des arcs DB et Dx; c'est pourquoi, ayant calculé le sinus de 87^d, on prendra sa différence avec le rayon 100000, et pour trouver le sinus de tout autre arc entre 87^d et 90^d, on fera cette proportion; le quarré de 3^d ou de $180'$, est au quarré du nombre des minutes du complément de l'arc en question, comme la différence du rayon au sinus de 87^d, est à un quatrième terme, qui sera Dt, et qui étant retranché du rayon, donnera Ct où Qx sinus de l'arc en question.

Par exemple, ayant trouvé que le sinus de 87^d est 99863, si je veux avoir le sinus de $88^d\ 24'$, dont le complément est $1^d\ 36'$ ou $96'$, je ferai cette proportion, $\overline{180'}^2 : \overline{96'}^2 :: 137 : Dt$, par laquelle je trouve que Dt vaut 39, à très-peu de chose près; retranchant 39, du rayon 100000, j'ai 99961 pour les sinus de $88^d\ 24'$, tel qu'il est en effet dans les Tables.

291. Ayant calculé ainsi les sinus, on aura facilement les tangentes et les sécantes, par ce qui a été dit (282).

292. Les sinus étant calculés, on calcule leurs loga-

rithmes, comme on calcule ceux des nombres. Il faut pourtant observer que si l'on prenoit dans les Tables la valeur numérique d'un des sinus, pour calculer son logarithme selon ce qui a été dit (*Arith.* 225), on ne trouveroit pas ce logarithme absolument le même qu'il est dans la colonne des logarithmes des sinus; la raison en est que les sinus des tables ont été calculés originairement, dans la supposition que le rayon étoit de 10000000000 parties; mais comme les calculs ordinaires n'exigent pas une telle précision, on a supprimé dans les Tables actuelles les cinq derniers chiffres des valeurs numériques des sinus, tangentes, etc. en sorte que ces valeurs, telles qu'elles sont actuellement dans les tables, ne sont approchées qu'à environ une unité près, sur 100000. Il n'en a pas été de même des logarithmes des sinus, tangentes, etc. On les a conservés tels qu'ils ont été calculés, pour le rayon supposé de 10000000000 parties, et c'est pour cette raison qu'on leur trouve une caractéristique beaucoup plus forte que ne semble supposer la valeur numérique du sinus correspondant, ou de la tangente correspondante, en sorte que, lorsqu'on fait usage des logarithmes des sinus, tangentes, etc. on calcule dans la supposition tacite que le rayon soit de 10000000000 parties, et lorsqu'on fait usage des valeurs numériques des sinus, tangentes, etc. on calcule dans la supposition que le rayon soit de 100000 parties seulement.

A l'égard des logarithmes des tangentes et sécantes, on les a par une simple addition et une soustraction, lorsqu'une fois on a ceux des sinus; cela est évident d'après ce qui a été dit (282) et (*Arith.* 216).

293. Quoique les Tables ordinaires ne donnent les sinus que pour les degrés et minutes, néanmoins on peut en dé-

Digitized by Google

duire les valeurs de ces mêmes lignes, pour les degrés, minutes et secondes, et cela en suivant exactement ce que nous venons de prescrire pour les degrés et minutes seulement. Mais comme on emploie plus souvent les logarithmes de ces lignes, au lieu de ces lignes elles-mêmes, nous nous arrêterons un moment sur ce dernier objet.

Supposant qu'on ait les logarithmes des sinus et des tangentes, de minute en minute; quand on voudra avoir le logarithme du sinus d'un certain nombre de degrés, minutes et secondes, on prendra dans les Tables celui du sinus du nombre des degrés et minutes; on prendra aussi la différence des deux logarithmes voisins, qui est à côté, et on fera cette proportion : 60 secondes sont au nombre de secondes en question, comme la différence des logarithmes, prise dans les Tables, est à un quatrième terme qu'on ajoutera au logarithme du sinus des degrés et minutes.

Si, au contraire, on avoit un logarithme de sinus qui ne répondit pas à un nombre exact de degrés et minutes; pour avoir les secondes, on feroit cette proportion : La différence des deux logarithmes, entre lesquels tombe le logarithme donné, est à la différence entre ce même logarithme et celui qui est immédiatement plus petit dans la Table, comme 60 secondes sont à un quatrième terme, qui seroit le nombre de secondes à ajouter au nombre de degrés et minutes de l'arc qui, dans la Table, est immédiatement au-dessous de celui que l'on cherche.

294. On pourra suivre cette règle, tant que l'arc ne sera pas au-dessous de 3 degrés; lorsqu'il sera au-dessous, on se conduira comme dans cet exemple; supposons qu'on demande le sinus de $1^d\ 55'\ 48''$; on feroit cette proportion, $1^d\ 55'$: $1^d\ 55'\ 48''$ :: le sinus de $1^d\ 55'$ est à un quatrième terme, qui (à cause que les petits arcs sont pro-

Digitized by Google

portionnels à leurs sinus) sera sans erreur sensible, le sinus de $1^d\ 55'\ 48''$. Mais pour calculer plus commodément, on réduira les deux premiers termes en secondes; et alors prenant dans les Tables le logarithme du sinus de $1^d\ 55'$ qui est le troisième terme, on lui ajoutera le logarithme de $1^d\ 55'\ 48''$ réduits en secondes, enfin du total on retranchera le logarithme de $1^d\ 55'$ réduits en secondes, le reste (*Arithmétique* 216) sera le logarithme du quatrième terme, c'est-à-dire, le logarithme cherché.

Réciproquement, pour trouver le nombre de degrés, minutes et secondes d'un arc au-dessous de 3 degrés, et dont on a le sinus; on chercheroit d'abord dans les Tables, quel est le nombre de degrés et minutes; puis on feroit cette proportion: le sinus du nombre de degrés et minutes trouvés, est au sinus proposé, comme ce même nombre de degrés et minutes réduits en secondes, est au nombre total de secondes de l'arc cherché; ainsi, par logarithmes, l'opération se réduira à prendre la différence entre le logarithme du sinus proposé, et celui du sinus du nombre de degrés et minutes immédiatement au-dessous, et à ajouter ce logarithme, au logarithme de ce nombre de degrés et minutes réduits en secondes; la somme sera le logarithme du nombre de secondes que vaut l'arc cherché. Par exemple, si l'on me donne 8,6233427 pour logarithme du sinus d'un arc; je trouve dans les Tables, que le nombre de degrés et minutes le plus approchant, est $2^d\ 24'$, et que la différence entre le logarithme du sinus proposé, et celui du sinus de ce dernier arc, est 0013811; j'ajoute cette différence avec 3,9365137, logarithme de $2^d\ 24'$ réduits en secondes; la somme 3,9378948 répond dans les Tables de logarithmes, à 8667; c'est le nombre de secondes de l'arc cherché, qui par conséquent est de $2^d\ 24'\ 27''$. Cette règle est l'inverse de la précédente.

Digitized by Google

295. A l'égard des logarithmes des tangentes, on suivra les mêmes règles en changeant le mot de *sinus* en celui de *tangente*. Il faut seulement en excepter les arcs qui sont entre 87 degrés et 90 degrés, pour lesquels on suivra celle-ci. Calculez le logarithme de la tangente du complément, par la règle qu'on vient de prescrire pour les tangentes, et retranchez ce logarithme du double du logarithme du rayon. En effet, les triangles semblables *CBD*, *CFE* (*fig.* 136), font voir que la tangente est le quatrième terme d'une proportion dont les trois premiers sont, la cotangente, le rayon et le rayon. Et si au contraire on avoit le logarithme de tangente d'un arc qui, devant être entre 87 degrés et 90 degrés, devroit avoir des secondes; on retrancheroit ce logarithme, du double du logarithme du rayon, et on auroit la tangente du complément qui étant nécessairement entre o degrés et 3 degrés, se détermineroit facilement d'après ce qui précède; prenant le complément de l'arc ainsi trouvé, on auroit l'arc cherché.

296. Puisque le sinus d'un arc est la moitié de la corde d'un arc double; si l'on descendoit par le principe donné (284), jusqu'au sinus de l'arc le plus approchant d'une seconde, et qu'en doublant ce sinus, pour avoir la corde de 2 secondes, on répétât ce double autant de fois que l'arc de 2 secondes est contenu dans la demi-circonférence, il est visible qu'on auroit un nombre fort approchant de la longueur de la demi-circonférence, mais plus petit; et si par la proportion donnée (282) on calculoit la tangente d'une seconde, et que l'ayant doublée, on répétât ce double

autant de fois que le double de cet arc est contenu dans la demi-circonférence, on trouveroit un nombre fort approchant de la demi-circonférence, mais plus grand; on peut donc, par le calcul des sinus, approcher du rapport du diamètre à la circonference : en procédant de cette manière, on trouveroit que le rayon étant supposé de 10000000000, la demi-circonférence seroit entre 31415926536 et 31415926535.

Concluons donc de-là que le rayon étant 1, les 180 degrés de la demi-circonférence valent 3,1415926535; le degré vaut 0,0174532925 la minute vaut 0,0002908882; la seconde vaut 0,0000048481; et ainsi de suite.

Du Graphomètre.

297. Avant que d'enseigner l'usage des principes précédens, pour la résolution des triangles, il est à propos de faire connoître comment on mesure les angles qui font partie de ces triangles.

L'instrument qu'on emploie lorsqu'on veut mesurer les angles avec une précision suffisante pour la plupart des pratiques, est le *Graphomètre* (*fig.* 145).

C'est un demi-cercle de cuivre divisé en 180^d, et sur lequel on marque même les demi-degrés, selon la grandeur de son diamètre.

Digitized by Google

La demi-circonférence *DHB* sur laquelle les divisions sont marquées, n'est pas une simple ligne : c'est une couronne demi-circulaire à laquelle l'ouvrier donne plus ou moins de largeur; et cette couronne est ce qu'on appelle le *limbe* de l'instrument.

Le diamètre *DB* fait corps avec l'instrument; mais le diamètre *EC* qu'on nomme *alidade*, n'y est assujetti que par le centre *A* autour duquel il peut tourner et parcourir, par son extrémité *C*, toutes les divisions de l'instrument. Chacun de ces deux diamètres est garni à ses deux extrémités, de *pinnules* à travers lesquelles on regarde les objets. Quelquefois, au lieu de pinnules, chacun de ces deux diamètres porte une lunette. Celle qui répond au diamètre *BD*, est parallèle à ce diamètre. L'autre, fixée à l'alidade *EC* peut se mouvoir avec elle, et s'incliner un peu sur elle, afin de n'être pas obligé de déranger le plan de l'instrument pour apercevoir les objets qui seroient un peu élevés ou abaissés à l'égard de ce plan.

L'instrument est porté sur un pied, et peut, sans rien changer à la position du pied, être incliné dans tous les sens, suivant le besoin.

Pour rendre le graphomètre propre à mesurer les angles avec plus de précision, à indiquer les parties de degrés; on fait, le plus souvent, sur

la largeur et à l'extrémité du diamètre mobile, des divisions qui selon la manière dont elles correspondent à celles du limbe, servent à connoître les parties de degré, de 5 en 5 minutes, ou de 4 en 4 minutes, etc.

Pour les faire marquer de 5′ en 5′, par exemple, on prend sur la largeur et à l'extrémité de l'alidade, une étendue de 11 degrés, et on la divise en douze parties égales, dont chacune est par conséquent de 55′. Lorsque la première division de l'alidade correspond à l'une des divisions du limbe, alors l'angle compris entre les deux diamètres, est mesuré par les divisions du limbe. Mais lorsque la première division de l'alidade ne s'accorde pas avec une des divisions du limbe; alors on cherche sur l'une et sur l'autre, quelle est la division qui approche le plus de se correspondre, et l'on ajoute au nombre de degrés marqués sur le limbe entre la première division de celui-ci, et celle de l'alidade, autant de fois 5 minutes qu'il y a d'intervalles sur l'alidade entre sa première division, et celle qui a sa correspondante sur le limbe; parce que pour chaque intervalle il y a 5 minutes de différence entre le limbe et l'alidade.

Si on vouloit évaluer les minutes de 4 en 4, on prendroit un arc de 14 degrés que l'on diviseroit en quinze parties; et pour évaluer de 3

Digitized by Google

en 3, on prendroit 19 degrés que l'on diviroit en vingt parties.

Pour mesurer un angle, avec cet instrument; par exemple, pour mesurer l'angle que formeroient au point *A* (*fig.* 145) les lignes qu'on imagineroit tirées de ce point aux deux objets *G* et *F*; on place le centre du graphomètre en *A*, et on dispose l'instrument de manière que regardant à travers les pinnules du diamètre fixe *BD*, l'on aperçoive l'un *F* de ces objets, et qu'en même temps l'autre objet *G* se trouve dans le prolongement du plan de l'instrument; ce qu'on fait en inclinant plus ou moins le graphomètre: alors on fait mouvoir l'alidade *EC* jusqu'à ce qu'on puisse apercevoir l'objet *G* à travers les pinnules *E* et *C*; l'arc *BC* compris entre les deux diamètres, est la mesure de l'angle *GAF*.

Lorsqu'on veut employer le graphomètre à mesurer des angles dans un plan vertical; c'est-à-dire des angles formés dans un plan qui passe par ce qu'on appelle une ligne *à-plomb*; on donne au plan de l'instrument, la position verticale, à l'aide d'un poids suspendu par un fil dont on attache une extrémité au centre du graphomètre. Lorsque le fil rase le bord de l'instrument, et répond à 90^d, le graphomètre a la disposition convenable.

Digitized by Google

De la résolution des Triangles-rectangles.

298, Nous avons dit ci-dessus (271), que pour être en état de calculer ou de résoudre un triangle, il falloit connoître trois des six parties qui le composent, et que parmi les trois choses connues, il falloit qu'il y eût au moins un côté. Comme l'angle droit est un angle connu, il suffit donc dans les triangles-rectangles, de connoître deux choses différentes de l'angle droit; mais il faut qu'une, au moins, de ces deux choses, soit un côté. Il faut encore remarquer que comme les deux angles aigus d'un triangle-rectangle valent ensemble un angle droit, dès que l'un des deux est connu, l'autre l'est aussi.

La résolution des triangles-rectangles se réduit à quatre cas : ou les deux choses connues sont un des deux angles aigus, et un côté de l'angle droit; ou elles sont un angle aigu et l'hypothénuse; ou un côté de l'angle droit et l'hypothénuse; ou enfin les deux côtés de l'angle droit.

Si on en excepte le cas où connoissant deux côtés, on demanderoit le troisième; cas qui n'a pas besoin d'autre règle que celle qui a été donnée (166); ces quatre cas trouveront toujours

leur résolution dans l'une des deux proportions ou analogies suivantes.

299. 1°. *Le rayon des Tables, est au sinus d'un des angles aigus, comme l'hypothénuse est au côté opposé à cet angle aigu.*

300. 2°. *Le rayon des Tables, est à la tangente d'un des angles aigus, comme le côté de l'angle droit adjacent à cet angle, est au côté opposé à ce même angle.*

Pour démontrer la première de ces deux analogies, il n'y a qu'à se représenter, (*fig.* 143) que dans le triangle-rectangle *CED*, la partie *CA* de l'hypothénuse soit le rayon des tables; alors en imaginant l'arc *AB*, la perpendiculaire *AP* sera le sinus de l'angle *ACB* ou *DCE*; or à cause des parallèles *AP* et *DE*, on aura, dans les triangles semblables *CAP*, *CDE*, $CA : AP :: CD : DE$, c'est-à-dire, $R : sin.\ DCE :: CD : DE$, ce qui est précisément la première analogie.

On prouvera de même, que $R : sin.\ CDE :: CD : CE$.

Pour la seconde, il faut se représenter, dans le triangle rectangle *CEF* (*fig.* 144), que la partie *CA* du côté *CE* soit le rayon des tables; et ayant imaginé l'arc *AB*, la perpendiculaire

AD élevée sur *AC* au point *A*, sera la tangente de l'angle *C* ou *FCE*; alors à cause des triangles semblables *CAD*, *CEF*, on aura *CA* : *AD* :: *CE* : *EF*, c'est-à-dire, *R* : *tang. FCE*, :: *CE* : *EF*, ce qui fait la seconde des deux analogies énoncées ci-dessus.

On prouvera de la même manière, que.... *R* : *tang. CFE* :: *EF* : *CE*.

501. Dans les applications qui vont suivre, nous emploierons toujours les logarithmes des sinus, tangentes, etc. au lieu des sinus, tangentes, etc. et pour familiariser les Commençans avec l'usage des complémens arithmétiques, nous en ferons usage dans tous les calculs, à l'exception des cas, où le logarithme à retrancher seroit celui du rayon, dont la caractéristique étant 10, la soustraction est très-facile.

Après ces observations, venons à l'application des deux analogies démontrées ci-dessus, aux quatre cas dont nous avons parlé.

EXEMPLE I. *Déterminer la hauteur* AC *d'un édifice* (*fig.* 146), *par des mesures prises sur le terrein.*

On s'éloignera de cet édifice à une distance *CD*, telle que l'angle compris entre les deux lignes qu'on imaginera menées du point *D* au pied et au sommet de l'édifice, ne soit ni trop

aigu ni fort approchant de 90^d ; et ayant mesuré cette distance *CD*, on fixera au point *D* le pied d'un graphomètre. On disposera cet instrument de manière que son plan soit vertical et dirigé vers l'axe *AC* de la tour, et que son diamètre fixe *HF*, soit horizontal, ce qui se fera à l'aide d'un petit poids suspendu par un fil attaché au centre ; ce fil doit alors raser le bord de l'instrument et répondre à 90^d. On fera mouvoir le diamètre mobile jusqu'à ce qu'on puisse apercevoir à travers les pinnules ou la lunette dont il est garni, le sommet *A* de l'édifice ; alors on observera sur l'instrument le nombre des degrés de l'angle *FEG*, qui est aussi celui de son opposé au sommet *AEB*.

Cela posé, la hauteur *AC* de l'édifice, étant perpendiculaire à l'horizon, est perpendiculaire à *BE* ; c'est pourquoi on a un triangle-rectangle *ABE*, dans lequel, outre l'angle droit, on connoît *BE* égal à *CD* qu'on a mesuré, et l'angle *AEB* ; on cherche la valeur de *AB* ; on voit donc que les trois choses connues, et celle que l'on cherche, sont les termes de l'analogie du n°. 300 ; donc, pour trouver *AB*, on fera cette proportion, *R* : *tang. AEB* :: *BE* : *AB*.

Supposons, par exemple, que la distance *CD* ou *BE* ait été trouvée de 132 pieds, et l'angle *AEB* de $48^d\ 54'$.

On aura *R* : *tang.* $48^d\ 54'$ :: 132^p : *AB* ; de sorte que

prenant dans les tables la valeur de la tangente de $48^d\ 54'$; la multipliant par 132, et divisant ensuite par la valeur du rayon prise dans les tables, on aura le nombre de pieds de *AB*, auquel ajoutant la hauteur *ED* de l'instrument, on aura la hauteur cherchée *AC*.

Mais en opérant par logarithmes, on aura plus facilement et plus promptement, comme il suit,

Log. *tang.* $48^d\ 54'$	10,0593064
Log. 132	2,1205739
Somme	12,1798803
Log. du rayon	10,0000000
Reste ou log. de *AB*	2,1798803

Qui répond dans les tables à 151,32 à moins d'un centième près; ainsi *AB* est de 151^p et 32 centièmes; ou $151^p\ 3^p\ 10^l$.

Remarquons, en passant, que le logarithme du rayon ayant 10 pour caractéristique, et des zéros pour ses autres chiffres, on peut, lorsqu'il s'agit de l'ajouter ou de le retrancher, se dispenser de l'écrire, et se contenter d'ajouter ou d'ôter une unité aux dixaines de la caractéristique du logarithme auquel il doit être ajouté, ou dont il doit être retranché.

EXEMPLE II. *BDC* (fig. 147) *est l'arrondissement de la contrescarpe, compris entre les prolongemens égaux* AB, AC *des deux faces d'un bastion; on demande la corde* BC *et la flèche* DE *de cet arrondissement, en supposant connus* AB, AC, *et l'angle* BAC *égal à l'angle flanqué du bastion.*

Soient *AB* et *AC*, chacun de 20^T ou 120^P, et l'angle *BAC* de $83^d\ 8'$.

Dans le triangle *BEA*, rectangle en *E*, on aura (299).

1°. $R : sin.\ BAE :: AB : BE$

2°. $R : sin.\ ABE$ ou $cos.\ BAE :: AB : AE$.

Donc 1°.	
Log. *AB* ou log. 120^P.	2,0791812
Log. *sin.* *BAE*, ou log. *sin.* $41^d\ 34'$. . . .	9,8218351
Somme moins log. du rayon.	11,9010163

Qui, dans les tables, répond à $79^P,62$; donc la corde *BC* est de $159^P,24$. . . . .

2°. Log. 120^P.	2,0791812
Log. *cos.* $41^d\ 34'$.	9,8740085
Somme — log. du rayon.	11,9531897

Qui répond à $89^P,78$; donc la flèche *DE* ou *AD* — *AE*, est de $30^P,22$.

Par la même méthode que nous venons d'employer pour déterminer la corde *DE*, on peut résoudre, par le calcul, cette autre question...... *déterminer le vent du boulet dans* les pièces d'un calibre connu.

La méthode graphique que l'on suit pour cela, consiste à élever à l'extrémité *A* (*fig.* 148) d'une ligne *AB*, égale au diamètre du boulet, une perpendiculaire *AD* égale au rayon *AC*; puis du point *A* comme centre, et du rayon *AD* on décrit l'arc *DCE* qui rencontre en *E*, la circonférence qui a *AB* pour diamètre; on porte la corde *DE*, de *B* en *F*, et *AF* est le vent du boulet; c'est-à-dire, que *AF* est la quantité, dont le diamètre intérieur de la pièce doit être plus grand que celui du boulet.

Pour déterminer *AF* par le calcul, il ne s'agit, en imaginant la corde *AE*, que de calculer *DE* dans le triangle isocèle *DAE*, dont on connoît les côtés *AD*, *AE*,

Digitized by Google

égaux chacun au demi-diamètre du boulet, et l'angle *DAE* qui (63 et 93) est de 150^{d}; en imaginant donc du point *A* une perpendiculaire sur *DE*, on aura deux triangles rectangles égaux, par l'un desquels on calculera, comme dans l'exemple précédent, la valeur de la demi-corde *DE*. Doublant et retranchant de la valeur de *AB*, on aura celle de *AF*.

Par exemple, pour les pièces de 4, dont le boulet a 3^{po} 0^{l} 3^{pts} $\frac{3}{4}$, ou 5^{po},026; on trouvera *DE* de 2^{po},923; le vent du boulet, dans les pièces de ce calibre, est donc de 0^{po},103 ou de 0^{po} 1^{l} 2^{pts} $\frac{4}{5}$.

Exemple III. *Le cable ou cordage d'ancre* AC (fig. 149) *étant de* 32^{T} *ou* 192^{P}, *et la profondeur* AB *de la rivière de* 12^{P}, *trouver l'angle* ACB *que fait le cordage avec le lit* BC *de la rivière, supposé horizontal, et abstraction faite de la courbure que ce cordage peut prendre, tant par l'impulsion de l'eau, que par l'excès de son poids sur celui de l'eau dont il occupe la place.*

On imaginera le triangle-rectangle *ABC*, dans lequel on connoît *AC* de 192 pieds, *AB* de 12 pieds, et l'angle droit *B*. Et pour trouver l'angle *ACB*, on fera (299) cette proportion, *AC* : *AB* :: *R* : *sin. ACB*.

Donc, par logarithmes,

Log. *AB*.	1,0791812
Log. du rayon.	10,0000000
Complément arithm. log. *AC*.	7,7166988
Somme.	18,7958800

ou log. sinus de *ACB*, qui dans les tables répond à 3^{d} 35$^{\prime}$.

Exemple IV. *Trouver l'angle que la ligne de mire fait avec l'axe prolongé, dans une pièce d'un calibre et de dimensions connus.*

Si

Si par le point *H* (*fig.* 71) le plus élevé du renflement du bourlet, on imagine la droite *HI* parallèle à l'axe *AB*, l'angle *GHI* sera égal à l'angle *GCA* que la ligne de mire fait avec l'axe prolongé. Connoissant donc dans le triangle-rectangle *GIH*, le côté *GI* et le côté *HI*, il sera facile d'avoir l'angle *GIH*, par cette proportion (300) *IH* : *GI* :: *R* : *tang. GHI*.

Par exemple, dans la pièce de 12 légère, on a *AG*

de.	6^{po},231
BH.	4, 926
et par conséquent *GI*.	1, 305
d'ailleurs *HI*.	77, 254

on aura donc 77,254 : 1,305 ou 77254 : 1305 :: *R* : *tang. GHI*, donc par logarithmes,

Log. 1305.	3,1156105
Log. du rayon.	10,0000000
Complément arith.-log. 77254.	5,1120790
Somme.	18,2276895

C'est le logarithme de la tangente de l'angle cherché, lequel sera par conséquent de 0^d 58'.

EXEMPLE V. *Une pièce de 12 légère, étant pointée à 3 degrés, trouver la hauteur à laquelle la ligne de mire s'élève à la distance de 600 toises qui est à-peu-près la portée de cette pièce sous l'angle de 3 degrés.*

La ligne de mire faisant avec l'axe, un angle de 58', ainsi qu'on vient de le voir, ne fera donc avec l'horizon qu'un angle de 2^d 2'; ainsi sa hauteur, à la distance horizontale de 600 toises, sera le second côté de l'angle droit dans un triangle rectangle, dont l'angle adjacent au premier côté 600 toises, est de 2^d 2'. On aura donc ce côté

(300) par la proportion R : *tang.* $2^d\ 2'$ :: 600^T est à un quatrième terme que l'on trouvera de 21^T, 3.

EXEMPLE VI. *La première embrasure d'une batterie* AC *à ricochet* (fig. 150) *étant directe, trouver l'inclinaison de la septième embrasure; c'est-à-dire l'angle que la ligne du tir fait avec l'épaulement* AC *à la septième embrasure; on suppose que toutes les pièces de cette batterie sont dirigées vers un même point* B *éloigné de 250 toises ou 1500 pieds.*

La ligne AB du tir de la première embrasure est supposée perpendiculaire à l'épaulement AC; ainsi la question est de déterminer l'angle BCA du triangle rectangle BAC dont l'angle A est droit, le côté AB est de 1500 pieds, et le côté AC est déterminé par la grandeur, la distance et le nombre des embrasures.

Supposons, par exemple, qu'il y ait 20 pieds de distance du milieu d'une embrasure au milieu de sa voisine; alors on fera cette proportion, 120 : 1500 :: R : *tang.* BCA. Donc par logarithmes,

Log. 1500...........................	3,1760913
Log. du rayon........................	10,0000000
Complément arithm.-log. 120............	7,9208188
Somme......................	11,0969101

C'est le logarithme de la tangente de l'angle BCA qui est donc de $85^d\ 26'$.

Comme le heurtoir DF doit toujours être perpendiculaire à la ligne du tir, et qu'il doit être appuyé contre l'épaulement, au moins par une de ses extrémités, il fait donc avec l'épaulement un angle ADF, qui est le complément de celui DCE ou ACB que nous venons de déterminer; ainsi connoissant la longueur DF du heurtoir, et par conséquent sa moitié DE, il sera facile de calculer la

Digitized by Google

distance *CE* de l'épaulement, à laquelle doit être placé, sur la ligne de tir, le milieu *E* du heurtoir.

Résolution des Triangles obliquangles.

302. On se sert du terme de *triangles obliquangles*, pour désigner en général, les triangles qui n'ont point d'angle droit.

303. *Dans tout triangle rectiligne, le sinus d'un angle, est au côté opposé à cet angle, comme le sinus de tout autre angle du même triangle, est au côté qui lui est opposé.*

Car si on imagine un cercle circonscrit au triangle *ABC* (*fig.* 151), et qu'ayant tiré les rayons *DA*, *DB*, *DC*, on conçoive que d'un rayon *Db* égal à celui des Tables, on ait décrit le cercle *abc*; qu'enfin on aie tiré les cordes *ab*, *bc*, *ac* qui joignent les points de section *a*, *b*, *c*; il est facile de voir que le triangle *abc* est semblable au triangle *ABC*; car les lignes *Da*, *Db* étant égales, sont proportionnelles aux lignes *DA*, *DB*; donc (105) *ab* est parallèle à *AB*; on prouvera de même que *bc* est parallèle à *BC*, et *ac* parallèle à *AC*; donc (102) $AB : ab :: BC : bc$, ou $AB : \frac{1}{2} ab :: BC : \frac{1}{2} bc$; or la moitié de la corde *ab* est (274) le sinus de *ah* moitié de l'arc *ahb*; et cette moitié de l'arc *ahb* est la mesure de l'angle *acb* qui a son sommet à la

circonférence, et qui est égal à l'angle *ACB*; donc $\frac{1}{2}$ *ab* est le sinus de l'angle *ACB*; on prouvera de même que $\frac{1}{2}$ *bc* est le sinus de l'angle *BAC*; donc *AB* : *sin. ACB* :: *BC* : *n. BAC.*

304. Cette proposition sert à résoudre un triangle. 1°. Lorsqu'on connoît deux angles et un côté. 2°. Lorsqu'on connoît deux côtés et un angle opposé à l'un de ces côtés.

EXEMPLE I. *On veut connoître les distances* CA, CB, (fig. 152) *d'une galiote à bombes* C, *à deux batteries de côté* A *et* B.

Des points *A* et *B* on observera (au même instant, si la galiote *C* est en mouvement) les angles *CAB*, *CBA*; puis on mesurera la distance *AB* des deux batteries *A* et *B*. Alors dans le triangle *CAB* dont on connoît deux angles et un côté, on retranchera de 180 degrés la somme des deux angles connus, pour avoir le troisième, et l'on déterminera *AC* et *CB* par les deux proportions suivantes.

sin. C : *AB* :: *sin. B* : *AC*
sin. C : *AB* :: *sin. A* : *BC.*

Supposons, par exemple, que *AB* ait été trouvé de 256 toises; l'angle *A*, de $84^d\ 14'$; l'angle *B*, de $85^d\ 40'$; on aura l'angle *C*, de $10^d\ 6'$; et pour avoir *AC* et *BC*, on opèrera par logarithmes, comme il suit.

Log. sin. *B*. . .	9,9987567	Log. sin. *A*. . .	9,9977966
Log. *AB*. . . .	2,4082400	Log. *AB*. . . .	2,4082400
Compl. arith. log. sin. *C*.	0,7560528	Compl. arith. log. sin. *C*.	0,7560528
Log. *AC*. . . .	13,1630495	Log. *CB*. . . .	13,1620894
Donc *AC*. . .	1456 toises.	Donc *CB*. . .	1452 toises.

Digitized by Google

EXEMPLE II. *Connoissant la distance* AC (fig. 153) *d'un point* C *à l'angle flanqué d'un bastion, la distance* AB *des sommets des angles flanqués de deux bastions voisins, ou le côté extérieur du polygone; et ayant observé l'angle* C, *trouver la distance* BC.

Soit le côté extérieur *AB*, de 200 toises; la distance *AC* de 130 toises, et l'angle *C* de $59^d\ 16'$. On commencera par calculer l'angle *B* par cette proportion *AB* : *sin. C* :: *AC* : *sin. B*. Opérant donc par logarithmes, on aura

Log. sin. $59^d\ 16'$	9,9342737
Log. 130	2,1139434
Complém. arith.-log. 200	7,6989700
Somme	19,7471871

C'est le logarithme du sinus de l'angle *B*; mais comme un sinus (279) appartient également à un angle aigu et à l'angle obtus qui en est le supplément, et que rien dans l'énoncé de la question ne détermine si l'angle *B* doit être aigu ou obtus, on n'est pas plus en droit de prendre pour valeur de l'angle *B*, la quantité $33^d\ 58'$ qui répond dans les Tables, au logarithme trouvé, que son supplément $146^d\ 2'$. Mais supposons que l'on sache d'ailleurs que l'angle *B* doit être aigu; alors nous devons prendre $33^d\ 58'$ pour sa valeur; d'où nous conclurons que l'angle *BAC* est de $86^d\ 46'$. Ainsi pour avoir le côté *BC*, il ne s'agit donc plus que de faire cette proportion, *sin. C* : *AB* :: *sin. BAC* : *BC*; donc

Log. 200	2,3010300
Log. sin. $86^d\ 46'$	9,9993081
Complément arith.-log. sin. $59^d\ 16'$	0,0657263
Somme	12,3660644

C'est le logarithme du côté *BC* que l'on trouve par conséquent de $232^T,3$.

305. *Si l'on connoît la somme de deux quantités, et leur différence; on aura la plus grande de ces deux quantités, en ajoutant la moitié de la différence, à la moitié de la somme; et la plus petite, en retranchant au contraire, la moitié de la différence, de la moitié de la somme.*

Par exemple, si je sais que deux quantités font ensemble 57, et qu'elles diffèrent de 17, j'en conclus que ces deux quantités sont 37 et 20, en ajoutant d'une part la moitié de 17 à la moitié de 57, et retranchant de l'autre part la moitié de 17, de la moitié de 57.

En effet, puisque la somme comprend la plus grande et la plus petite, si à cette somme on ajoutoit la différence, elle comprendroit alors le double de la plus grande; donc la plus grande vaut la moitié de ce tout, c'est-à-dire, la moitié de la somme des deux quantités, plus la moitié de leur différence.

Au contraire, si de la somme on ôtoit la différence, il resteroit le double de la plus petite; donc la plus petite vaudroit la moitié du reste, c'est-à-dire, la moitié de la somme, moins la moitié de la différence.

306. *Dans tout triangle rectiligne* ABC (fig. 154 et 155), *si de l'un des angles on abaisse une perpendiculaire sur le côté opposé; on aura toujours cette*

Digitized by Google

proportion : Le côté AC *sur lequel tombe, ou sur le prolongement duquel tombe la perpendiculaire, est à la somme* AB + BC *des deux autres côtés, comme la différence* AB — BC *de ces mêmes côtés, est à la différence des segmens* AD *et* DC *ou à leur somme, selon que la perpendiculaire tombe en dedans ou en dehors du triangle.*

Décrivez du point B comme centre, et d'un rayon égal au côté BC, la circonférence $CEGF$, et prolongez le côté AB, jusqu'à ce qu'il la rencontre en E. Alors AE et AC sont deux sécantes, tirées d'un même point, pris hors du cercle; donc, selon ce qui a été dit (123), on aura cette proportion, $AC : AE :: AG : AF$.

Or AE est égale à $AB + BE$ ou $AB + BC$; AG est égale à $AB - BG$ ou $AB - BC$; et AF est (*fig.* 154) égale à $AD - DF$ ou (53) à $AD - DC$; donc $AC : AB + BC :: AB - BC : AD - DC$. Dans la *figure* 155, AF est égale à $AD + DF$ ou $AD + DC$; on a donc, dans ce cas, $AC : AB + BC :: AB - BC : AD + DC$.

307. Donc lorsqu'on connoît les trois côtés d'un triangle, on peut, par cette proposition, connoître les segmens formés par la perpendiculaire menée d'un des angles, sur le côté opposé; car alors on connoît (*fig.* 154) la somme AC de

ces segmens, et la proportion qu'on vient d'enseigner, fait connoître leur différence, puisqu'alors les trois premiers termes de cette proportion sont connus : on connoîtra donc chacun des segmens, par ce qui a été dit (305). Dans la *figure* 155, on connoît la différence des segmens *AD* et *CD*, qui est le côté même *AC*, et la proportion détermine la valeur de leur somme.

308. Il est aisé, d'après cela, de résoudre cette question, *Connoissant les trois côtés d'un triangle, déterminer les angles.*

On imaginera une perpendiculaire abaissée de l'un de ces angles, ce qui donnera deux triangles rectangles *ADB*, *CDB*.

On calculera par la proposition précédente, l'un des segmens, *DC*, par exemple ; et alors dans le triangle rectangle *CDB*, connoissant deux côtés *BC* et *CD*, outre l'angle droit, on calculera facilement l'angle *C*, par ce qui a été dit (299).

EXEMPLE. Le côté *AB* est de 142 pieds, le côté *BC* de 64, et le côté *AC* de 184 ; on demande l'angle *C*.

Je calcule la différence des deux segmens *AD* et *DC*, par cette proportion, 184 : 142 + 64 :: 142 — 64 : *AD* — *DC*, ou 184 : 206 :: 78 : *AD* — *DC* que je trouve valoir 87,32 ; donc (305) le petit segment *CD* vaut la moitié de 184, moins la moitié de 87,32, c'est-à-dire, qu'il vaut 48,34.

Digitized by Google

Cela posé, dans le triangle rectangle *CDB*, je cherche l'angle *CBD*, qui étant une fois connu, fera connoître l'angle *C*; et pour trouver cet angle *CBD*, je fais cette proportion (299), *BC* : *CD* :: *R* : *sin. CBD*, c'est-à-dire, 64 : 48,34 :: *R* : *sin. CBD*.

Opérant par logarithmes,

Log. de 48,34.	1,6843066
Log. du rayon..	1. . . . . .
Complément arithm. du log. de 64.	8,1938200
Somme ou log. *sin. CBD*.	19,8781266

Qui, dans les Tables, répond à $49^d\ 3'$; donc l'angle *C* est de $40^d\ 57'$

309. *Dans tout triangle rectiligne, la somme de deux côtés, est à leur différence, comme la tangente de la moitié de la somme des deux angles opposés à ces côtés, est à la tangente de la moitié de leur différence.*

Car selon ce qui a été dit (303) on a (*fig.* 156) $AB : sin.\ C :: AC : sin.\ B$; donc (97) $AB + AC : AB - AC :: sin.\ C + sin.\ B : sin.\ C - sin.\ B$; or (288) $sin.\ C + sin.\ B : sin.\ C - sin.\ B :: tang.\ \frac{C+B}{2} : tang.\ \frac{C-B}{2}$ donc $AB + AC : AB - AC :: tang.\ \frac{C+B}{2} : tang.\ \frac{C-B}{2}$.

310. Cette proposition sert à *résoudre un triangle, dont on connoît deux côtés et l'angle compris.* Car

Digitized by Google

si l'on connoît l'angle *A*, par exemple, on connoît aussi la somme des deux angles *B* et *C*, en retranchant l'angle *A* de 180 degrés. Donc en prenant la moitié du reste qu'on aura par cette soustraction, et cherchant sa tangente dans les Tables, on aura, avec les deux côtés *AB* et *AC* supposés connus, trois termes de connus dans la proportion qu'on vient de démontrer; on pourra donc calculer le quatrième, qui fera connoître la moitié de la différence des deux angles *B* et *C*. Alors connoissant la demi-somme et la demi-différence de ces angles, on aura (305) le plus grand, en ajoutant la demi-différence à la demi-somme; et le plus petit, en retranchant, au contraire, la demi-différence, de la demi-somme. Enfin ces deux angles étant connus, on aura aisément le troisième côté, par la proposition enseignée (303).

EXEMPLE. Supposons que le côté *AB* soit de 142 pieds, le côté *AC* de 120, et l'angle *A* de 48 degrés; on demande les deux angles *C* et *B* et le côté *BC*.

Je retranche 48 degrés de 180 degrés, et il me reste 132 degrés pour la somme des deux angles *C* et *B*, et par conséquent 66 degrés pour leur demi-somme.

Je fais cette proportion, $142 + 120 : 142 - 120 :: tang.\ 66^d : tang.\ \frac{C-B}{2}$.

Ou $262 : 22 :: tang.\ 66^d : tang.\ \frac{C-B}{2}$.

Et opérant par logarithmes,

Digitized by Google

Log. tang. 66 degrés.	10,3514169
Log. 22..	1,3424227
Complément arithm. du log. de 262. . .	7,5816987
Somme ou log. tang. de la demi-différ. . .	19,2755383

Qui, dans la Table, répond à $10^d\ 41'$.

Ajoutant cette demi-différence à la demi-somme 66^d, et la retranchant de cette même demi-somme, j'aurai, comme on le voit ici,

	$66^d\ 0'$		$66^d\ 0'$
	$10^d\ 41'$		$10^d\ 41'$
L'angle *C*.	$76^d\ 41'$.	L'angle *B*. . . .	$55^d\ 19'$

Enfin, pour avoir le côté *BC*, je fais cette proportion, *sin.* $C : AB :: sin. A : BC$; c'est-à-dire, *sin.* $76^d\ 41' : 142^p :: sin.\ 48^d : BC$.

Opérant comme dans les exemples ci-dessus, on trouvera que *BC* vaut $108^p,4$.

311. Tels sont les moyens qu'on peut employer pour la résolution des triangles : voici maintenant quelques exemples de l'application qu'on peut en faire aux figures plus composées.

312, Supposons que *C* et *D* (fig. 157) *sont deux objets dont on ne peut approcher, mais dont on a cependant besoin de connoître la distance.*

On mesurera une base *AB*, des extrémités de laquelle on puise appercevoir les deux objets *C* et *D*. On observera au point *A* les angles *CAB*, *DAB*, que font, avec la ligne *AB*, les lignes *AC*, *AD*, qu'on imaginera aller du point *A* aux deux objets *C* et *D*; on observera de même au point *B*, les angles *CBA*, *DBA*.

Cela posé, on connoît dans le triangle *CBA*, les deux angles *CAB*, *CBA* et le côté *AB*; on pourra donc calculer le côté *AC*, par ce qui a été dit (303). Parcillement dans le triangle *ADB*, on connoît les deux angles *DAB*, *DBA* et le côté *AB*; ainsi, on pourra, par le même principe, calculer le côté *AD*; alors, en imaginant la ligne *CD*, on aura un triangle *CAD*, dans lequel on connoît les deux côtés *AC*, *AD* qu'on vient de calculer, et l'angle compris *CAD*; car cet angle est la différence des deux angles mesurés *CAB*, *DAB*; on pourra donc calculer le côté *CD* (310).

313. On peut aussi, par ce même moyen, savoir quelle est la direction de *CD*, quoiqu'on ne puisse approcher de cette ligne; car, dans le même triangle *CAD*, on peut calculer l'angle *ACD* que *CD* fait avec *AC*; or si par le point *C* on imagine une ligne *CZ* parallèle à *AB*, on sait que l'angle *ACZ* est supplément de *CAB*, à cause des parallèles (40); donc, prenant la différence de l'angle connu *ACZ*, à l'angle calculé *ACD*, on aura l'angle *DCZ* que *CD* fait avec *CZ* ou avec sa parallèle *AB*; et comme il est fort aisé d'orienter *AB*, on aura donc aussi la direction de *CD*.

314. Nous avons dit, en parlant des lignes, que nous donnerions le moyen de *déterminer différens points d'un même alignement, lorsque des obstacles empêchent de voir les extrémités l'une de l'autre:* voici comment on peut s'y prendre.

On choisira un point *C* (*fig.* 158) hors de la ligne *AB* dont il s'agit, et qui soit tel qu'on puisse, de ce point, apercevoir les deux extrémités *A* et *B*; on mesurera les distances *AC* et *CB*, soit immédiatement, soit en formant des triangles dont ces lignes deviennent côtés, et qu'on puisse calculer comme dans l'exemple précédent.

Digitized by Google

Alors dans le triangle *ACB*, on connoîtra les deux côtés *AC* et *CB*, et l'angle compris *ACB*; on pourra donc (310) calculer l'angle *BAC*.

Cela posé, on fera planter selon telle direction *CD* qu'on voudra, plusieurs piquets, et ayant mesuré l'angle *ACD*, on connoîtra dans le triangle *ACD* le côté *AC* et les deux angles *A* et *ACD*; on pourra donc (304) calculer le côté *CD*; alors on continuera de faire planter des piquets dans la direction *CD*, jusqu'à ce qu'on ait parcouru une longueur égale à celle qu'on a calculé, et le point *D* où l'on s'arrêtera sera dans l'alignement des deux points *A* et *B*.

315. S'il n'étoit pas possible de trouver un point *C* duquel on pût apercevoir à la fois les deux points *A* et *B*, on pourroit se retourner de la manière suivante.

On chercheroit un point *C* (*fig.* 159) d'où l'on pût apercevoir le point *B*, et un autre point *E* d'où l'on pût voir le point *A* et le point *C*. Alors mesurant ou déterminant, par quelque expédient tiré des principes précédens, les distances *AE*, *EC* et *CB*, on observeroit au point *E* l'angle *AEC*, et au point *C* l'angle *ECB*. Cela posé dans le triangle *AEC*, connoissant les deux côtés *AE*, *EC*, et l'angle compris *AEC*, on calculeroit par ce qui a été dit (310) le côté *AC* et l'angle *ECA*; retranchant l'angle *ECA* de l'angle observé *ECB*, on auroit l'angle *ACB*; et comme on vient de calculer *AC*, et qu'on a mesuré *CB*, on retomberoit dans le cas précédent, comme si les deux points *A* et *B* eussent été visibles du point *C*; on achèvera donc de la même manière.

316. D'après ces méthodes et l'inspection de la *figure* 160, il est facile de voir comment on s'y prendroit pour établir une batterie sur le prolongement de la courtine *AB*.

317. *Mesurer une hauteur dont le pied est inaccessible, comme seroit la hauteur d'une montagne* (fig. 161).

On mesurera sur le terrein une base *FG* des extrémités de laquelle on puisse apercevoir le point *A* dont on veut connoître la hauteur; ensuite avec le graphomètre, dont *BF* et *CG* représentent la hauteur, on mesurera les angles *ABC*, *ACB*, que font avec la base *BC*, les lignes *BA*, *CA*, qu'on imagine aller des deux points *B* et *C* au point *A*; enfin à l'une des stations, en *C*, par exemple, on disposera l'instrument comme on l'a fait dans l'exemple relatif à la *figure* 146, et on mesurera l'angle *ACD*, qui est l'inclinaison de la ligne *AC*, à l'égard de l'horizon; alors connoissant dans le triangle *ACB*, les deux angles *ABC*, *ACB*, et le côté *BC*, il sera facile (304) de calculer le côté *AC*; et dans le triangle *ADC*, où l'on connoît maintenant le côté *AC*, l'angle mesuré *ACD*, et l'angle *D* qui est droit, puisque *AD* est la hauteur perpendiculaire, il sera facile de calculer *AD*, et on aura la hauteur du point *A* au-dessus du point *C*. Si l'on veut savoir ensuite quelle est la hauteur du point *A*, au-dessus du point *B*, ou de tout autre point environnant, il ne s'agira plus que de niveller ou de trouver la différence de hauteur entre les points *C* et *B*; c'est ce dont nous parlerons ci-après.

318. A, B, C (*fig.* 162) *sont trois points connus; c'est-à-dire, dont les distances et les angles, que forment ces distances, sont connus; on veut établir une batterie hors de ces trois points, mais de manière que du point* D *où elle sera placée, on voie* AB *sous un angle connu, et* BC *sous un angle connu. On demande la position du point* D.

On imaginera un cercle, dont la circonférence passe par

Digitized by Google

les trois points *A*, *C* et *D* ; puis concevant la droite *DBF*, on imaginera les deux cordes *AF* et *CF*.

Dans le triangle *AFC* on connoît *AC*, l'angle *FAC* égal à *FDC*, et l'angle *FCA* égal à *FDA* ; on pourra donc calculer *FC* et *FA* (304).

Dans le triangle *FBC*, on connoît *FC*, *BC*, et l'angle *FCB*, composé de *FCA*, égal à *FDA*, et de *ACB* connu ; on pourra donc (310) calculer l'angle *CBF*, dont le supplément est *CBD*.

Alors dans le triangle *CBD*, où l'on connoît *CB*, l'angle *CBD* et l'angle *BDC*, il sera facile de calculer *DC*. On s'y prendra de même pour calculer *AD*, par le moyen des triangles *AFC*, *ABF* et *ABD*.

Si la somme des deux angles observés *ADB*, *BDC*, étoit égale à l'angle *ABC*, ou à son supplément, le problême seroit indéterminé, ou susceptible d'une infinité de solutions, le point *B* se trouveroit alors sur la circonférence.

319. Parmi les exemples que les commençans peuvent prendre pour s'exercer aux calculs trigonométriques, nous croyons devoir leur indiquer le calcul des lignes et des angles d'un front de fortification régulière ; par exemple, dans un pentagone construit selon le premier systême de M. de Vauban.

Nous supposerons que le côté extérieur *AB* (*fig.* 163) de 180 toises, la perpendiculaire *CD* de 30 toises ; les faces de bastion *AE*, *BF*, de 50 toises. La largeur *AG* du fossé, vis-à-vis de l'angle flanqué, ou le rayon de l'arrondissement de la contrescarpe, de 18 toises ; la capitale *HI* de la demi-lune, de 55 toises ; la distance *ET* de l'angle de l'épaule, à la rencontre *T* de la face *QI* de la demi-lune, trois toises.

Alors le triangle *ACD*, rectangle en *C*, dans lequel

on connoît *A C* et *C D*, fera connoître les angles *D A C*, *A D C*, par ce qui a été dit (300); et le côté *A D*, par ce qui a été dit (166); l'angle *D A C* étant connu, on aura ses égaux *D B C*, *E L K*, *F K L*; et du même angle *D A C*, comparé à la moitié de l'angle intérieur du pentagone, on conclura la moitié de l'angle flanqué *V A E*.

A D et *A E* étant connus, on aura *D E* et son égale *D F*; ainsi dans le triangle *A D F*, où l'on connoît *A D* et *D F*, et l'angle *A D F*, double de *A D C*, on calculera (310) les angles *D F A*, *D A F*, et le côté *A F*; et comme dans cette construction le triangle *A F L* est isocèle, par le moyen du triangle *L A F*, on aura facilement les deux angles *A L F* et *A F L*. Ajoutant au premier de ces deux angles, l'angle *K L E* égal à *D A C*, on aura l'angle *K L F* de la courtine. Et retranchant de l'angle *A F L* l'angle calculé *A F D*, on aura *K F L*, dont le supplément *L F B* est l'angle de l'épaule.

Si de *A L* égale à *A F* calculé, on retranche *A D*, on aura *D L*; et les triangles semblables *A D B*, *K D L*, donneront *K L* ou la courtine.

Dans le triangle *K L F* dont tous les angles sont connus, et le côté *K L*, on aura aisément *K F* et *L F* (304).

De *K F* retranchant *F D*, on aura *K D*; et dans le triangle rectangle *K M D* où l'on connoît *K D* et *K M*, on aura *M D* (166). On connoîtra donc *M C*.

Dans le triangle *A O C* (en imaginant que *O* est le centre du polygone) on connoît *A C* et les angles; on calculera donc facilement *A O* et *O C* (299 et 300).

Dans le triangle rectangle *A G F*, où l'on connoît *A F* et *A G*, on calculera *F A G* (299) qui étant ajouté à *F A D* et à *D A O* actuellement connus, donnera le supplément de *G A N*.

On

Digitized by Google

On aura donc *GAN* et son complément *ANG* ou *ONH*; d'où, par le triangle *ONH*, dont l'angle *NOH* est connu, il sera facile de conclure l'angle *NHO*, et par conséquent son supplément *QHI*.

Dans le triangle rectangle *NAG*, il sera donc facile de calculer *AN*; ce qui donnera *ON* dans le triangle *ONH*, où les angles étant d'ailleurs connus, on pourra calculer *OH*. On aura donc *CH*, et comme on connoît *HI*, on aura *CI*. Ajoutant *CI* à *CD*, on aura *DI* dans le triangle *TDI*, où l'on connoît d'ailleurs *DT* ou *DE* + *ET*, et l'angle *TDI*; on pourra donc (310) calculer l'angle *DIT* ou *HIQ* du triangle *HIQ* dont on connoît actuellement *HI* et l'angle *QHI*. D'où il sera facile de calculer dans ce triangle *QHI*, la demi-gorge *QH*, et la face *QI* de la demi-lune *QIP*.

Usages de la Trigonométrie pour lever et tracer les Plans.

319. L'art de tracer les plans consiste à déterminer sur le papier des points qui soient placés entr'eux, comme le sont sur le terrein, les objets que ces points doivent représenter. On suppose alors que tous les objets dont il s'agit sont situés dans un même plan horizontal; mais s'ils n'y étoient pas, en sorte que les opérations qu'on aura faites pour déterminer les situations respectives de ces objets, n'eussent pas été faites toutes dans un même plan horizontal, ou à peu près, il faudroit, avant que de tracer le plan, ramener

ces observations à ce qu'elles auroient été, si on les eût faites dans un plan horizontal. Nous allons d'abord expliquer comment on doit s'y prendre quand les observations ont été faites dans un plan horizontal, ou y ont été réduites ; nous ferons voir ensuite comment on les y réduit.

Soient donc *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F*, *G*, *H*, *I*, *K*, (*fig.* 163), plusieurs objets remarquables, dont on veut représenter les positions respectives sur un plan.

On dessinera grossièrement, sur un papier, ces objets, dans les positions qu'on leur juge à l'œil ; et pour cet effet, on se transportera aux différens lieux où il sera nécessaire, pour prendre une connoissance légère de tous ces objets : ce premier dessin qu'on appelle un *croquis* ou *brouillon*, servira à marquer les différentes mesures qu'on prendra dans le cours des opérations.

On mesurera une base *AB*, dont la longueur ne soit pas trop disproportionnée à la distance des objets les plus éloignés qu'on peut voir de ses extrémités, et qui soit telle, en même-temps, que de ces mêmes extrémités on puisse appercevoir le plus grand nombre d'objets que faire se pourra ; alors avec le graphomètre on mesurera au point *A* les angles *EAB*, *FAB*, *GAB*, *CAB*, *DAB*, que font au point *A*, avec la base *AB*,

Digitized by Google

les lignes qu'on imaginera menées de ce point aux objets *E*, *F*, *G*, *C*, *D*, qu'on suppose pouvoir être apperçus des extrémités *A* et *B* de la base : on mesurera de même, au point *B*, les angles *EBA*, *FBA*, *GBA*, *CBA*, *DBA*, que font en ce point, avec la ligne *AB*, les lignes qu'on imaginera menées de ce même point *B*, aux mêmes objets que ci-dessus.

S'il y a des objets, comme *H*, *I*, qu'on n'ait pas pu voir des deux extrémités *A* et *B*, on se transportera en deux des lieux *E* et *F* qu'on vient d'observer, et d'où l'on puisse voir ces objets *H* et *I*; alors regardant *EF* comme une base, on mesurera les angles *HEF*, *IEF*, *HFE*, *IFE*, que font avec cette nouvelle base, les lignes qui iroient de ses extrémités aux deux objets *H* et *I*. Enfin, s'il a y quelqu'autre objet, comme *K*, qu'on n'ait pu voir, ni des extrémités de *AB*, ni de celles de *EF*, on prendra encore pour base quelqu'autre ligne, comme *FG*, qui joint deux des points observés, et on mesurera de même, à ses deux extrémités, les angles *KFG*, *KGF*.

Cela posé, dans les triangles *ACB*, *ADB*, *AEB*, *AFB*, *AGB*, dans chacun desquels on connoît le côté *AB*, et les deux angles adjacens à ce côté, il sera facile (304) de calculer les deux autres côtés.

Digitized by Google

A l'égard des triangles *HEF*, *IEF*, comme on n'y a mesuré que les angles sur *EF*, on commencera par calculer *EF*, à l'aide du triangle *EAF*, dans lequel on connoît l'angle *EAF*, différence des deux angles observés *EAB*, *FAB*, et les côtés *AE*, *AF*, qu'aura donnés le calcul précédent : il sera donc facile d'avoir *EF*, par ce qui a été dit (310) ; alors, dans chacun des triangles *HEF*, *IEF*, on connoîtra le côté *EF*, et les deux angles adjacens ; on calculera les deux autres côtés, comme il vient d'être dit pour les premiers ; on se conduira de même pour le triangle *KFG*.

Ces calculs étant faits, on tirera (*fig.* 164) sur le papier, une ligne *ab*, que l'on fera d'autant de parties de l'échelle qui doit déterminer la grandeur que l'on veut donner au plan, d'autant de parties, dis-je, qu'on a trouvé de toises ou de pieds dans *AB* ; puis pour déterminer l'un quelconque des points que l'on a pu voir des extrémités *A* et *B* de la base, le point *E*, par exemple, on prendra sur l'échelle autant de parties que le calcul a donné de toises ou de pieds pour *AE*, et du point *a*, comme centre, et d'un rayon *ae*, égal à ce nombre de parties, on décrira un arc. On prendra pareillement sur l'échelle autant de parties, qu'on a trouvé de toises ou de pieds dans *BE*, et du point *b*,

Digitized by Google

comme centre, et d'un rayon égal à ce nombre de parties, on décrira un arc qui coupe celui qui a été déduit du rayon *ae* en un point *e*, lequel représentera sur le papier, la position du point *e*, à l'égard de *ab*, semblable à celle de *E*, à l'égard de *AB*; car, par cette construction, le triangle *aeb* a les côtés proportionnels à ceux du triangle *AEB*; il lui est donc semblable : on s'y prendra de même pour déterminer les points *f*, *g*, *c*, *d*, qui doivent être la représentation des points *F*, *G*, *C*, *D*.

A l'égard des points *h*, *i*, *k*, qui doivent être la representation des objets *H*, *I*, *K*, qui n'ont pu être apperçus des points *A* et *B*; les points *e*, *f*, *g*, ayant été déterminés comme il vient d'être dit, les lignes *ef*, et *fg*, serviront de base, comme *ab* en a servi pour *c*, *d*, *e*. *f*, *g*; en sorte que l'opération se réduira de même à tracer des points *e* et *f*, comme centres, et des rayons *he*, *hf*, qui contiennent autant de parties de l'échelle, que *HE* et *HF* ont été trouvés (par le calcul) contenir de toises ou de pieds; à tracer, dis-je, deux arcs dont l'intersection *h* marquera le point *H*; et ainsi des autres. Alors la figure tracée sur le papier sera semblable au terrein que l'on a levé (128), puisqu'elle sera composée d'un même nombre de triangles que celui-ci, semblables à ceux de ce dernier, et

semblablement disposés ; il ne s'agira plus que de dessiner, à chacun de ces points, les objets qu'on y aura remarqués ; et on remplira les parties intermédiaires, qui demandent moins de scrupule, par le moyen dont nous parlerons plus bas.

Il faut observer encore, que cette méthode devant être employée pour fixer les points principaux et fondamentaux du plan, il est à propos d'employer un graphomètre à lunettes, plutôt qu'un graphomètre à pinnules.

De la manière de réduire les Angles observés dans des plans inclinés à l'horizon, à ceux qu'on observeroit si les objets étoient dans un plan horizontal.

320. Lorsque, dans les opérations précédentes, les objets ne sont pas tous situés dans un même plan horizontal, il faut, avant que de former le plan qui doit les représenter, réduire les angles, à ce qu'ils auroient été observés si tous les objets eussent été dans un même plan horizontal : voici comment cela peut s'exécuter.

Soient *A*, *B*, *C* (*fig.* 165) trois points différemment élevés au-dessus de l'horison, et dont

les hauteurs respectives soient *AD*, *BF*, *CE*; en sorte que *FDE* soit un plan horizontal : on a mesuré l'angle *BAC*; mais comme le plan sur lequel on veut rapporter ces objets, est *FDE*, on imagine que *B* est placé en *F*, *A* en *D*, et *C* en *E*; et l'on demande l'angle *FDE*.

A la station qu'on fera pour mesurer l'angle *BAC*, on mesurera aussi les angles *BAD*, *CAD*, que font les rayons visuels *AB*, *AC*, avec le fil-à-plomb au point *A*; ce que l'on fera, comme il a été expliqué dans l'exemple relatif à la *fig.* 146 *page* 220.

Cela posé, concevons que *AB* et *AC* prolongés, s'il est nécessaire, rencontrent le plan horizontal *FDE*, aux points *G* et *I*; dans les triangles *ADG*, *ADI*, rectangles en *D*, si on regarde *AD* comme le rayon des tables, *DG* et *DI* seront les tangentes des angles observés *GAD*, *IAD*; et *AG*, *AI* en seront les sécantes; donc, si on prend dans les tables, les sécantes et les tangentes des angles *GAD* et *IAD*, on connoîtra 1°. dans le triangle *GAI*, les côtés *GA* et *AI*, et l'angle observé *GAI*; on pourra donc, par ce qui a été dit (310), calculer le côté *GI*; 2°. dans le triangle *GDI*, on connoîtra les côtés *GD* et *DI*, et le côté *GI* que l'on vient de calculer; on pourra donc, par ce qui a été dit (308), calculer l'angle *GDI*.

On s'y prendroit d'une manière semblable pour réduire l'angle observé au point *B* ; et lorsque dans un triangle on aura réduit deux angles, il sera inutile de faire un semblable calcul pour réduire le troisième, parce que les trois angles du triangle réduit, ne pouvant valoir que 180^d, le troisième sera toujours facile à avoir.

Ayant ainsi réduit les angles, il sera facile de réduire les distances, ou l'une d'entr'elles, (car il suffit d'en réduire une pour chaque triangle). En effet, si on imagine l'horizontale *BO*, dans le triangle *BAO*, rectangle en *O*, on connoît *BA* qui a été mesuré, l'angle droit et l'angle *BAO* ; on aura donc (299) facilement *BO* ou *FD*.

EXEMPLE.

On a trouvé l'angle *BAC* de $62^d\ 37'$; l'angle *BAD* de $88^d\ 5'$, et l'angle *CAD* de $78^d\ 17'$.

Je cherche dans les tables, les sécantes et les tangentes des angles *BAD* et *CAD*, et je trouve, comme il suit, en négligeant les trois dernières décimales.

Séc.	88^d	$5'$	ou	*AG*.	29,90
Séc.	78.	17	ou	*AI*	4,92
Tang.	88.	5	ou	*DG*.	29,88
Tang.	78.	17	ou	*DI*	4,82

Alors, dans le triangle *AGI*, je calcule (310) la demi-différence des deux angles *AGI*, *AIG*, par cette propor-

Digitized by Google

tion $AG + AI : AG - AI$ :: *tang.* 58d 41′, demi-somme de ces deux angles, est à un quatrième terme; je trouve donc que cette demi-différence est 49d 42′, ce qui donne l'angle AGI, de 8d 59′; d'où (304), on trouvera GI de 27,98.

Connoissant les trois côtés DG, DI, GI, on trouvera (308) que l'angle GDI est de 62d 27′.

Si les tables dont on fait usage ne contenoient pas les sécantes, on les auroit néanmoins facilement par le principe donné (282).

Des Méthodes par lesquelles on supplée à la Trigonométrie, dans l'art de lever les Plans.

321. L'usage du calcul trigonométrique, dans l'art de lever les plans, n'est indispensable, que lorsque les points principaux de l'espace dont on veut former la carte, sont à des distances assez considérables les uns des autres.

Mais lorsque les distances sont médiocres, après avoir mesuré une base, et observé les angles, comme il vient d'être dit (319), au lieu de calculer les triangles, pour former, a l'aide des côtés calculés et réduits à l'échelle du plan, des triangles semblables à ceux qu'on à observés sur le terrein, on se contente de former ces triangles semblables par le moyen des angles observés, ainsi que nous allons le dire.

Digitized by Google

Cette méthode est moins exacte que la précédente, en ce que le rapporteur ou en général l'instrument que l'on emploie pour former sur le papier des angles égaux à ceux qu'on a observés sur le terrein, ne pouvant être que d'un assez petit rayon, on ne peut apporter dans la formation de ces angles, la même précision qu'on peut apporter en mesurant sur l'échelle la valeur que le calcul a déterminée pour les côtés.

Mais comme il est peu ordinaire qu'on ait besoin d'une exactitude aussi scrupuleuse, et que d'ailleurs la méthode de rapporter les angles sur le papier est beaucoup plus expéditive, cette dernière doit être regardée comme étant d'un usage fort étendu et suffisamment exact. Elle consiste à tirer (*fig.* 164) une ligne *ab* qui contienne autant de parties de l'échelle du plan, qu'on a trouvé de mesures dans la base *AB*. Puis aux extrémités *a*, *b*, on fait les angles *eab*, *eba*, *fab*, *fba*, etc. égaux aux angles observés *EAB*, *EBA*, *FAB*, *FBA*, etc. que font avec la base *AB* les objets que l'on a pu voir des points *A*, *B*. Puis joignant les points *e*, *f* par la droite *ef*, on forme aux extrémités de cette ligne comme base, des angles égaux à ceux qu'on a observés des deux points *E* et *F*. Et ainsi de suite.

322. On peut aussi se dispenser du calcul tri-

gonométrique pour réduire à des angles horizontaux, ceux qu'on auroit observés dans des plans inclinés à l'horizon. En voici la méthode.

Les mêmes observations étant supposées qu'au n.° 320 pour la *fig.* 165 ; au point *A* (*fig.* 166) de la ligne quelconque *AD*, on fera les angles *DAG*, *DAI* égaux aux angles verticaux observés *DAG* et *DAI* de la *figure* 165 ; au point quelconque *D* *fig.* 166, on élèvera sur *AD* la perpendiculaire indéfinie *IDG*. Au point *A* on mènera la ligne *AM* faisant avec *AI* l'angle *IAM* égal à l'angle *BAC* qu'il s'agit de réduire ; et ayant fait *AM* égal à *AG*, on tirera *IM*. Puis du point *I* comme centre, et du rayon *IM*, du point *D* comme centre, et du rayon *DG*, on décrira deux arcs qui se coupent en *O* ; l'angle *IDO* sera l'angle demandé.

De la Boussole et de son usage pour lever les parties de détail d'un plan.

323. La principale pièce de la boussole (*fig.* 167) est une aiguille aimantée soutenue en son milieu par un pivot sur lequel elle a toute la mobilité possible. Cette aiguille est renfermée dans une boîte de cuivre ou de bois. Sur le bord intérieur de cette boîte on marque les 360 degrés ; et vers le bord extérieur et aux divisions 180 de-

grés et 360 degrés, ou parallèlement à la ligne qui passe par ces deux divisions, on place deux pinnules qui forment ensemble ce qu'on appelle la *visière*.

324. L'usage de la boussole est fondé sur la propriété qu'a l'aiguille aimantée de rester constamment dans une même position, ou d'y revenir quand elle en a été écartée (du moins dans un même lieu et pendant un assez long intervalle de temps). D'où il suit que si on fait tourner la boîte de la boussole, on pourra juger de la quantité dont elle a tourné, en comparant le point de la graduation auquel l'aiguille répondra, à celui auquel elle répondoit d'abord.

325. On applique assez ordinairement une boussole au graphomètre ; non dans la vue de suppléer au graphomètre, mais pour *orienter* les objets, c'est-à-dire pour connoître, à environ un demi-degré, leur position à l'égard des quatre *points cardinaux* ou à l'égard de la ligne *nord* et *sud* avec laquelle l'aiguille aimantée fait constamment le même angle dans un même lieu, du moins pendant le cours d'environ une année.

326. La boussole est employée aux mêmes

Digitized by Google

usages que le graphomètre, c'est-à-dire à la mesure des angles ; mais plusieurs raisons ne permettant pas de donner beaucoup de longueur à l'aiguille, les degrés de la graduation occupent trop peu d'étendue sur l'instrument, pour qu'on puisse mesurer les angles avec autant de précision qu'avec le graphomètre : c'est ce qui fait qu'on n'emploie la boussole que pour déterminer les points de détail d'un plan ou d'une carte dont les points principaux ont été fixés par les moyens précédemment décrits.

327. Supposons donc qu'il s'agit de lever le cours d'une rivière, par exemple; on plantera des piquets aux coudes les plus sensibles *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F* (*fig.* 168); et ayant placé la boussole au point *A*, en sorte que la visière soit dirigée le long de *AB*, on observera sur la graduation, quel est le nombre de degrés compris entre la ligne *AB*, et la direction actuelle de l'aiguille ; puis on mesurera *AB*. On établira ensuite la boussole au point *B*; on dirigera de même la visière le long de *BC*, et l'on observera de même l'angle que *BC* forme avec *BN*, direction de l'aiguille, qui est parallèle à la première direction *AN* : on mesurera *BC*, et on fera pareilles opérations à chaque détour ; ayant ainsi mesuré tous les angles et toutes les distances,

Digitized by Google

on les rapportera sur le papier de la manière suivante.

On prendra arbitrairement le point *a*, (*fig.* 169) qui doit représenter le point *A*, et l'on mènera arbitrairement la ligne *an*, pour représenter la direction de l'aiguille aimantée. Au point *a*, on fera, à l'aide du rapporteur, l'angle *nab* égal à l'angle observé *NAB*; et on donnera à *ab* autant de parties de l'échelle du plan, qu'on a trouvé de mesures pour *AB*. Au point *b*, on mènera *bn*, parallèle à *an*, et l'on fera l'angle *nbc* égal à l'angle observé *NBC*, et on donnera à *bc* autant de parties de l'échelle, qu'on a trouvé de mesures pour *BC*. On continuera de même pour tous les autres points, après quoi on figurera les parties intermédiaires à peu près, telles qu'on les a jugées à la vue.

Ce que nous disons des détours d'une rivière, s'applique évidemment aux détours d'un chemin, à l'enceinte d'un bois, au contour d'un marais, etc.

De la Planchette, et de son usage pour lever les Plans.

328. Il y a encore une autre manière de lever, qui est d'autant plus commode, qu'elle exige peu d'appareil, et qu'en même-temps qu'on observe les différens points dont on veut avoir les

positions, on les trace sur le plan sans les perdre de vue. L'instrument qu'on emploie à cet effet, est représenté par la *fig.* 170. *ABCD*, est une planche de 16 à 18 pouces de long, et à peu près de pareille largeur, portée sur un pied comme le graphomètre. Sur cette planche on étend une feuille de papier, qu'on arrête par le moyen d'un chassis qui entoure la planche. *LM* est une règle garnie de pinnules placées à ses deux extrémités et dans un alignement parallèle au bord de la règle.

Lorsqu'on veut faire usage de cet instrument, qu'on appelle *planchette*, pour tracer le plan d'une campagne; on prend une base *mn*, comme dans les opérations ci-dessus; et posant le pied de l'instrument en *m*, on fait planter un piquet en *n*. On applique la règle *LM* sur le papier, et on la dirige de manière à voir le piquet placé en *n*, à travers des deux pinnules; alors on tire le long de la règle, une ligne *EF* à laquelle on donne autant de parties de l'échelle du plan, qu'on aura trouvé de mesures entre le point *E*, d'où l'on observe d'abord, et le point *f*, d'où l'on observera à la seconde station. On fait ensuite tourner la règle autour du point *E*, jusqu'à ce qu'on rencontre, en regardant au travers des pinnules, quelqu'un des objets *I*, *H*, *G*; et à mesure qu'on en rencontre un,

on tire le long de la règle une ligne indéfinie. Ayant ainsi parcouru tous les objets qu'on peut voir lorsqu'on est en *m*, on transporte l'instrument en *n*, et on laisse un piquet en *m*; alors on fait au point *n* les mêmes opérations à l'égard des objets *I*, *H*, *G*, qu'on a faites à l'autre station. Les lignes *fi*, *fh*, *fg* qui dans ce second cas vont, ou sont imaginées aller à ces objets, rencontrent les premières aux points *g*, *h*, *i*, qui font la représentation des objets *G*, *H*, *I*.

329. La planchette s'emploie principalement pour lever les détails d'un pays dont les points principaux ont déjà été déterminés exactement par les moyens ci-dessus, et rapportés ensuite sur le papier; ou pour ajouter à une carte déjà construite, des objets dont la position auroit été omise.

Par exemple, supposant que *A*, *B*, *C*, (*fig.* 171) sont des points qui ont été déjà déterminés et marqués sur la carte en *a*, *b*, *c*; que *D* soit un point dont la position est inconnue: voici comment avec la planchette on déterminera sa position *d*. On établira la planchette au point *D*, et on l'orientera de la manière qui va être expliquée ci-dessous; alors on dirigera l'alidade dans l'alignement *Aa*, et ensuite dans l'alignement *Bb*, et traçant une ligne le long de l'alidade, dans

Digitized by Google

dans chaque alignement, la rencontre *d* marquera sur la carte, la position du point *D* à l'égard des objets *A*, *B*, *C*. On vérifiera cette position en dirigeant l'alidade suivant *C c*, et observant si cette ligne prolongée passe par le point *d*.

330. On marque ordinairement sur la carte, la direction de l'aiguille aimantée ; et pour cet effet on emploie une boussole de figure rectangulaire, telle qu'on voit (*fig.* 172), dont la largeur est environ le tiers de la longueur, dans le milieu du fond est gravé une ligne parallèle au long côté de la boîte ; c'est sur cette ligne qu'est placé le pivot qui porte l'aiguille.

Pour marquer sur le plan la direction de l'aiguille aimantée, on établit l'alidade de la planchette dans l'alignement de deux objets marqués sur ce plan, et de manière que la représentation de ces objets sur le plan, soit sur ce même alignement ; alors on place la boussole sur la planchette, et on la tourne jusqu'à ce que l'aiguille s'arrête dans la ligne nord et sud de la boîte ; c'est-à-dire, dans la ligne du milieu du fond de la boîte ; enfin on trace une ligne selon la direction du long côté de la boîte, c'est la direction de l'aiguille.

331. Réciproquement, lorsque la direction

de l'aiguille est marquée sur la carte, et qu'on veut donner à la carte ou à la planchette, la même disposition qu'ont les objets sur le terrein; il ne s'agit que de faire convenir la ligne nord et sud de la carte, avec la ligne nord et sud de la boussole.

332. Au lieu de déterminer la position des objets par deux stations, comme nous l'avons expliqué ci-dessus pour la *figure* 170, on se contente souvent d'une seule station, mais alors on mesure pour chaque objet la distance de la planchette à cet objet, et on la rapporte en parties de l'échelle du plan, le long de la règle dirigée sur cet objet.

Du Quart-de-cercle.

333. Quoique le quart-de-cercle dont il s'agit ici, n'ait aucun rapport avec la Trigonométrie, ni avec l'art de lever les plans; nous n'en placerons pas moins ici la description parmi les instrumens qui servent à la mesure des angles.

On appelle *quart-de-cercle* dans l'Artillerie, tout instrument propre à faire connoître le degré d'inclinaison des bouches à feu, quoique quelques-uns de ces instrumens ne soient composés que d'un arc de 45 degrés.

Celui dont on a fait le plus d'usage, est le

Digitized by Google

quart-de-cercle *ACD*, *fig.* 173, qui, outre ses deux rayons ou règles *CA*, *CD*, et son limbe *AD*, divisé en 90 parties, porte une règle *AB* perpendiculaire à l'extrémité un rayon *CA*; au centre *C* est attaché un fil qui porte le plomb *I*, dont nous allons voir l'usage.

334. Lorsqu'on veut mesurer l'inclinaison d'un mortier, avec ce quart-de-cercle, on lui donne l'une ou l'autre des deux dispositions, représentées par les *fig.* 174 et 175; dans la première (*fig.* 174), la règle *AB* est appliquée sur la coupe du mortier, et dans la seconde (*fig.* 175), elle est placée sur la plate-bande; et parallèlement à l'axe, dans l'une et dans l'autre, on s'assure que le plan du quart-de-cercle, est vertical, lorsque le fil-à-plomb *CI* ne fait que raser le limbe de l'instrument.

Dans la *figure* 174 l'inclinaison du mortier est mesurée par l'angle *DCI* ou l'arc *DI* compris entre le fil-à-plomb et le rayon *CD*, parallèle à la règle *AB*, parce que cette inclinaison est le complément de l'angle, que l'axe du mortier, ou sa parallèle *CA*, fait avec la verticale ou *CI*.

Dans la *figure* 175, l'inclinaison du mortier est mesurée par l'angle *ACI* que fait le fil-à-

plomb avec le rayon *CA* perpendiculaire à la règle *AB*.

335. Les *figures* 176 et 177 représentent le même instrument réduit à 45^d. Dans la position indiquée par la *figure* 176, on ne peut mesurer que les inclinaisons au-dessous de 45^d ; et la position indiquée par la *figure* 177, ne peut servir que pour celles qui sont au-dessus de 45 degrés.

Dans la *figure* 176, l'angle *ACI* mesure l'inclinaison du mortier ; et dans la *figure* 177 l'inclinaison est mesurée par le complément de *ACI*.

336. La *figure* 178 représente l'instrument que l'on emploie pour mesurer l'inclinaison de l'axe des pièces de canon.

AB est une règle de fer, large d'environ 15 lignes, épaisse de 4, et de 3 à 4 pieds de longueur. A son extrémité *B* est fixé un plateau de fer *BE*, auquel, et sur son bord, la règle *AB* est perpendiculaire. Ce plateau, de même épaisseur que la règle, est circulaire, et d'un diamètre un peu moindre que celui de la pièce. Il est percé en son milieu d'un trou, pour donner passage à l'air quand on l'introduit dans le canon.

L'autre extrémité *A* de la règle *AB*, porte fixement un secteur circulaire de cuivre, d'environ 15 pouces de rayon, dont le limbe *CD* est divisé

Digitized by Google

en degrés et demi-degrés. La graduation commence à l'extrémité *C* du rayon *AC* perpendiculaire à la règle, et s'étend jusqu'à 45^d de *C* vers *D*; et seulement jusqu'à 4 ou 5 degrés à l'opposite. Du centre, pend un fil ou un cheveu chargé d'un plomb, renfermé dans un garde-filet, pour le mettre à l'abri du vent. Ce garde-filet est une boîte de cuivre longue et étroite, mobile autour du centre *A*; il est percé vers le bas d'un petit trou dont l'ouverture est garnie d'un verre ou d'une loupe, pour mieux reconnoître la division du limbe qui répond au fil. Le fond de ce garde-filet peut aussi loger un petit vase rempli d'eau, dans laquelle on fait plonger le plomb, afin d'arrêter ses vibrations.

Cet instrument n'est pas destiné pour la guerre; mais on l'emploie utilement pour des expériences qui demandent de la précision.

Du Nivellement.

337. Plusieurs observations démontrent que la surface de la terre n'est point plane, comme elle le paroît, mais courbe, et même sphérique, ou à très-peu de chose près sphérique. Lorsqu'un Vaisseau commence à découvrir une côte, les premiers objets qu'on remarque sont les objets les plus élevés. Or si la surface de la terre étoit

plane, en même-temps qu'on découvre la tour *B* (*fig.* 179), on devroit appercevoir tout le terrein adjacent *ABC*. Ce qui fait qu'il n'en est pas ainsi, c'est que la surface *DAC* de la Terre s'abaisse de plus en plus à l'égard de la ligne horizontale *DB* du Vaisseau. Deux points *D* et *B* peuvent donc paroître dans une même ligne horizontale *DB*, quoiqu'ils soient fort inégalement éloignés de la surface, et par conséquent du centre *T* de la Terre. Ce qu'on appelle *ligne horizontale*, c'est une ligne tirée dans un plan qui touche à la surface de la mer, ou parallèlement à ce plan, qu'on appelle *plan horizontal;* et une *ligne verticale* est une perpendiculaire à un plan horizontal.

Niveler, c'est déterminer de combien un objet est plus éloigné qu'un autre, à l'égard du centre de la Terre.

338. Lorsque l'un de ces objets vu de l'autre, paroît dans la ligne horizontale qui part de celui-ci, alors ils sont différemment éloignés du centre de la Terre. Pour connoître cette différence, il faut remarquer que la distance à laquelle on peut appercevoir un objet terrestre, ou du moins que la distance à laquelle on observe dans le nivellement, est toujours assez petite, pour que cette distance *DI* (*fig.* 179) mesurée sur la surface

Digitized by Google

de la Terre, puisse être regardée comme égale à la tangente *BD*; or on a vu (124) que la tangente *BD* est moyenne proportionnelle entre toute sécante menée du point *B*, et la partie extérieure *BI* de cette même sécante; mais à cause de la petitesse de l'arc *DI*, on peut regarder la sécante qui passe par le point *B* et le centre *T*, comme égale au diamètre; c'est-à-dire, au double de *IT* ou au double de *DT*; donc *BI* sera le quatrième terme de cette proportion, $2DT : DI :: DI : BI$.

Supposons, par exemple, que *DI* mesuré sur la surface de la Terre, soit de 1000 toises ou 6000 pieds: comme le rayon de la Terre est de 19605480 pieds, on trouvera *BI* par cette proportion, 39210960 : 6000 :: 6000 : *BI*; en faisant le calcul, on trouve $0^{p},91811$, qui reviennent à $11^{po.}\ 0^{l}\ 2^{pts}$; c'est-à-dire, qu'entre deux objets *B* et *D* éloignés de mille toises, et qui seroient dans une même ligne horizontale, la différence *BI* du niveau ou de distance au centre de la Terre, est de $11^{po.}\ 0^{l}\ 2^{pts}$.

339. Quand on a calculé une différence de niveau, comme *BI*, on peut calculer plus facilement celles qui répondent à une moindre distance, en faisant attention que les distances *BI*, *bi*, sont presque parallèles et égales aux lignes *DQ*, *Dq*, qui (173) sont entr'elles comme les quarrés des cordes ou des arcs *DI*, *Di*; car ici, les cordes et les arcs peuvent être pris l'un pour l'autre.

Ainsi pour trouver la différence *b i* de niveau, qui répondroit à 5000 pieds, je ferai cette proportion, $\overline{6000}^2 : \overline{5000}^2 :: 0,91811 : bi$, que je trouve, en faisant le calcul, de 0,63758 ou $7^{po.}\ 7^{l}\ 9^{pts}$.

340. Le point *B*, qui est dans la même horizontale que *D*, est dit être dans le *niveau apparent* de *D*, et le point *I* est le *niveau vrai* de *B*; en sorte que *BI* est la différence du niveau vrai au niveau apparent.

341. Ces notions supposées, pour connoître la différence de niveau de deux points *B* et *A* (*fig.* 180) qui ne sont pas dans la ligne horizontale menée par l'un d'entre eux, on emploiera un instrument propre à mesurer les angles, que l'on disposera, comme il a été dit dans l'exemple relatif à la *fig.* 146; on observera l'angle *BCD*, et ayant mesuré la distance *CD* ou *CI* à l'aide d'une chaîne qu'on tend horizontalement, et à diverses reprises, au-dessus du terrein *AVB*, on pourra, dans le triangle *CDB*, considéré comme rectangle en *D*, calculer *BD*, auquel on ajoutera la hauteur *CA* de l'instrument, et la différence *DI* de niveau, calculée par ce qui vient d'être dit (338 et 339).

Mais comme cette manière d'opérer suppose une grande exactitude dans la mesure de l'angle *BCD* et un instrument bien exact, on préfère

Digitized by Google

souvent d'aller au même but, par une voie plus longue, que nous allons décrire.

Du Niveau d'eau et de son usage.

342. *CABD* (*fig.* 181) représente un des instrumens dont on fait usage pour niveler; c'est celui qu'on appelle *niveau d'eau.*

Il consiste en un tuyau creux de fer-blanc ou d'un autre métal, coudé en *A* et *B*. Dans les deux parties éminentes *AC*, *BD*, on fait entrer deux tuyaux de verre *I* et *K*, mastiqués avec les parties *AC*, *BD*. Au milieu et par-dessous le tuyau *AB*, est attachée une virole pour placer ce tuyau sur un pied. On remplit d'eau tout le canal jusqu'à ce qu'elle s'élève dans les deux tuyaux de verre, à 2 ou 3 pouces de hauteur. La ligne *CD* où se termine la superficie de l'eau dans les deux tuyaux *IA*, *KB*, est une ligne horizontale.

L'usage de cet instrument exige une autre pièce que l'on appelle la *mire*. C'est un carton ou une feuille de fer-blanc (*fig.* 182), d'environ un pied en quarré, partagé en deux également par une ligne horizontale *MN* qui sépare la partie inférieure noircie, de la partie supérieure qui reste blanche. On attache ce carton sur une règle, de manière que *MN* soit perpendiculaire à la

longueur de la règle. Celle-ci doit entrer à coulisse dans une rainure le long d'une double toise *OP*, divisée en pieds, pouces et lignes ; la règle, en parcourant ainsi la rainure, permet de porter la ligne de mire où il en est besoin, et de l'y fixer.

343. Pour faire usage de ce niveau, on le place à distances à peu près égales des deux points dont on veut avoir la différence de niveau. Il n'est pas nécessaire que ce soit dans l'alignement de ces deux points. On pose la mire successivement à chacun de ces points, de manière que la double toise soit verticale. On hausse ou baisse la mire *MN*, jusqu'à ce que l'observateur, qui est au niveau *CABD*, apperçoive la ligne *MN* dans le prolongement de la ligne *CD*; alors la différence de hauteur de la mire *MN*, dans chacune des deux positions, sera la différence de niveau des deux points dont il s'agit.

Si l'on trouve, par exemple, qu'à l'un de ces points la ligne de mire *MN* a été élevée jusqu'à $4^{p}\ 8^{po.}$, et qu'à l'autre elle ait été élevée jusqu'à $3^{p}\ 9^{po.}$, on en conclura que la différence du niveau de ces deux points est de 11 pouces.

On s'y prendra de même pour tous les autres points qui seront à peu près à la même distance de la même station, qui pourront en être apperçus,

Digitized by Google

et dont la différence de niveau avec CD n'excédera pas celle que l'on peut mesurer avec la double toise OP.

344. Mais lorsque les autres objets seront trop éloignés, ou que la différence de niveau sera trop grande, on prendra à la seconde station l'un des points qu'on a nivelés à la première, afin d'y comparer les autres, et l'on se placera autant qu'on le pourra en un lieu qui soit à peu près également éloigné de ce point et des autres.

345. Si on ne pouvoit pas se placer à distances égales, ou à peu près égales des points qu'on veut niveler, alors la différence de niveau entre deux points quelconques ne seroit pas exprimée par la différence des hauteurs de la ligne de mire, à chaque point; parce que la différence du niveau vrai au niveau apparent n'est la même qu'à des distances égales; c'est pourquoi il faudroit, de la hauteur observée pour chaque point, retrancher la *correction du niveau*; c'est-à-dire, la différence du niveau vrai au niveau apparent.

Par exemple, si la mire est placée à 250 toises ou 1500 pieds, et que l'on ait trouvé $4^{p}\,8^{po.}$ pour la hauteur de la ligne de mire; au lieu de $4^{p}\,8^{po.}$ on ne comptera que $4^{p}\,7^{po.}\,4^{l}$, en

retranchant 8 lignes qui est la correction du niveau trouvée par ce qui a été dit (338 et 339).

346. Pour donner quelqu'application, nous supposerons qu'il soit question de *lever et tracer le profil d'un ouvrage de fortification* AGHIOP (fig. 183).

On imaginera cet ouvrage coupé par un plan vertical $AA'P'P$, dans lequel on concevra à une hauteur arbitraire AA', une ligne horizontale $A'P'$.

De tous les angles A, B, C, D, E, etc. on imaginera les verticales AA', BB', DD', EE', etc. on mesurera immédiatement les distances horizontales qui séparent ces verticales.

A l'égard des distances verticales, on placera le niveau sur le terre-plein BC du rempart, et la mire successivement à chacun des angles A, B, C, D, E, pour déterminer les hauteurs Aa, Bb, Cc, Dd, Ee; et ayant retranché la première, de la hauteur AA' de la ligne arbitraire $A'P'$, on ajoutera les autres au reste $A'a$, et l'on aura les verticales $B'B$, $C'C$, etc. jusqu'en E.

On placera ensuite le niveau sur le parapet, et la mire successivement aux points E, F, G, pour avoir les différences de niveau Ee', Ff, Gg. On retranchera la première de EE', et ajoutant les autres, au reste, on aura les verticales FF', GG'.

On se conduira de la même manière pour la partie $KLMNOP$, en plaçant le niveau sur le glacis.

A l'égard de la partie $GHIK$; comme les points H et I sont trop bas pour qu'on puisse faire usage de la double toise; le moyen le plus simple est de suspendre

Digitized by Google

un poids à un cordeau, attaché au bout d'une perche, que l'on posera horizontalement en G et en K, de manière que ce poids descende aux pieds H de l'escarpe, et I de la contrescarpe, et de mesurer la longueur du cordeau dans chaque position. On ajoutera la première à GG', et la seconde à KK', pour avoir HH', et II'.

Toutes ces distances, tant horizontales que verticales, étant ainsi mesurées, on formera facilement le profil, en tirant sur le papier une ligne pour représenter $A'P'$; portant successivement sur cette ligne des nombres de parties de l'échelle, égaux aux nombres de mesures trouvées pour les distances horizontales, et élevant à l'extrémité de chacune une perpendiculaire, à laquelle on donne autant de parties de l'échelle qu'on a trouvé de mesures pour la distance verticale correspondante.

Joignant les extrémités de ces verticales, on a le profil demandé.

347. Si l'on trouvoit quelque difficulté à mesurer les distances horizontales; par exemple, pour le talus intérieur AB, on mesureroit la longueur absolue de ce talus; et le triangle-rectangle AQB, dont on connoît AB par la mesure actuelle, et QB par le nivellement, donneroit AQ (166).

348. Le nivellement a encore d'autres usages; nous ne les parcourrons pas ici; mais nous nous en occuperons dans le traité de pratique qui terminera ce Cours. Nous y ferons connoître aussi quelques autres espèces de niveau.

Digitized by Google

TABLE DES DIFFÉRENTES MESURES.

MESURES *des surfaces.*

Caractères.

Toise quarrée. . . . . TT
Pied de toise quarrée ou toise-pied. . . . . TP
Pouce de toise quarrée ou toise - pouce. . . Tp
Ligne de toise quarrée ou toise-ligne. . . . Tl
Point de toise quarrée ou toise-point. . . . Tpt
Prime de toise ou toise-prime. . . . . T'

Subdivisions.

					T'
				1 Tpt	12
			1 Tl	12	144
		1 Tp	12	144	1728
	1 TP	12	144	1728	20736
1 TT	6	72	864	10368	124416

Pied quarré. . . . . PP
Pouce de pied quarré ou pied-pouce. . . . . Pp
Ligne de pied quarré ou pied-ligne. . . . . Pl
Point de pied quarré ou pied-point. . . . . Ppt
Prime de pied quarré ou pied-prime. . . . . P'

				P'
			1 Ppt	12
		1 Pl	12	144
	1 Pp	12	144	1728
1 PP	12	144	1728	20736

Mesures des Solides.

Toise-cube. TTT
Pied de toise-cube ou toise-toise-pied. . . . . TTP
Pouce de toise-cube ou toise-toise-pouce. . . TTp
Ligne de toise-cube ou toise-toise-ligne. . . . TTl
Point de toise-cube ou toise-toise-point. . . TTpt
Prime de toise-cube ou toise-toise-prime. . . TT'

					TT'
				1 TTpt	12
			1 TTl	12	144
		1 TTp	12	144	1728
	1 TTP	12	144	1728	20736
1 TTT	6	72	864	10368	124416

Pied-cube. . . . . PPP
Pouce de pied-cube ou pied-pied-pouce. . . PPp
Ligne de pied-cube ou pied-pied-ligne. . . . PPl
Point de pied-cube ou pied-pied-point. . . PPpt
Prime de pied-cube ou pied-pied-prime. . . PP'

				PP'
			1 PPpt	12
		1 PPl	12	144
	1 PPp	12	144	1728
1 PPP	12	144	1728	10368

Solive. . . . . S
Pied de solive. . . . . SP
Pouce de solive. . . . . Sp
Ligne de solive. . . . . Sl
Point de solive. . . . . Spt

					1 Spt
				1 Sl	12
			1 Sp	12	144
		1 SP	12	144	1728
	1 PPP	2	24	288	3456
1 Solive	3	6	72	864	10368

Digitized by Google

CIRCONFÉRENCE du Cercle.

Circonférence. . . . . Cir.
Degré. . . . . ^{d}
Minute. . . . . $'$
Seconde. $''$
Tierce. . . . . $'''$

				Tierces
			1 seconde	60
		1 minute	60	3600
	1 degré	60	3600	216000
Circonfér.	360	21600	1296000	77760000

Rapport du diam. à la circonférence. { suiv. Archimède :: 7 : 22
suiv. Metius :: 113 : 355.

Le même rapport, approché à moins d'un 100000000e près 1 : 3,14159265

Valeur de l'arc de { 1^{d} 0,01745329 ; 1$'$ 0,00029089 ; 1$''$ 0,00000485 } le rayon étant 1.

Logarithme du rapport de la circonfér. au diamètre. . . . . 0,4971499.

MESURES *itinéraires.*

Le degré terrestre.	57030[to.]
Diamètre de la Terre..	6535157
La lieue de 25 au degré.	2281
La lieue marine ou de 20 au degré. . . .	2851 $\frac{1}{2}$
La grande lieue d'Allemagne de 15 au degré.	3802
La lieue commune d'Allemagne.	3333
La petite lieue d'Allemagne $=$ $\frac{4}{5}$ de la grande.	3042
Le mille de Flandre.	3221
Le mille de France, d'Angleterre et d'Italie.	950 $\frac{1}{2}$
Le stade.	85

FIN.

TABLE

DES PRINCIPES.

LA ligne est l'étendue en longueur seulement, numéro 1.

La surface est l'étendue en longueur et largeur seulement, *Ibid.*

Le corps est l'étendue en longueur, largeur et profondeur, *Ibid.*

Le point n'a aucune étendue ; ce n'est que le terme de l'étendue, n. 2.

La ligne droite est le plus court chemin d'un point à un autre, *Ibid.*

La ligne courbe est la trace d'un point, qui dans son mouvement se détourne infiniment peu à chaque pas, *Ibid.*

La ligne droite est la mesure des lignes, n. 4.

La surface plane est celle à laquelle on peut appliquer exactement une ligne droite dans tous les sens, n. 5.

Le cercle est une surface plane terminée par une ligne courbe qu'on nomme *circonférence*, dont tous les points sont également éloignés d'un point de ce plan, appelé *centre*, n. 6.

Toute portion de la circonférence s'appelle *arc de cercle*, *Ibid.*

Le rayon est la distance du centre à la circonférence, *Ibid.*

Une corde ou soutendante, est une ligne droite, terminée de part et d'autre par la circonférence ; c'est un diamètre lorsqu'elle passe par le centre, *Ibid.*

Les cordes égales du même cercle, ou de cercles égaux, soutendent des arcs égaux ; et réciproquement n. 7.

L'angle est l'ouverture de deux lignes qui se ren-

contrent en un point qu'on nomme *sommet*, n. 9.

Un angle a pour mesure l'arc de cercle compris entre ses côtés; et décrit de son sommet comme centre, n. 12.

Un angle droit a pour mesure le quart de la circonférence, n. 16.

L'angle obtus est plus grand que l'angle droit, et l'angle aigu est moindre que l'angle droit, *Ibid.*

Deux angles de suite valent ensemble deux angles droits, n. 17.

Tous les angles rectilignes qui ont leur sommet au même point, et sont tracés dans un même plan, valent ensemble quatre angles droits, n. 18.

Le supplément d'un angle est sa différence à deux angles droits; et le complément d'un angle est sa différence à un droit, n. 19 et 21.

Les supplémens ou complémens du même angle, ou d'angles égaux, sont égaux, *Ibid.*

Les angles opposés au sommet sont égaux, n. 20.

Une ligne est perpendiculaire à une autre quand elle la rencontre sans pencher plus d'un côté que de l'autre; et quand elle penche de l'un ou de l'autre côté, elle est oblique, n. 23 et 28.

D'un même point, pris dans une ligne ou hors d'une ligne, on ne peut mener dans le même plan qu'une seule perpendiculaire à cette ligne, n. 25 et 26.

De toutes les droites menées d'un même point sur une ligne, la perpendiculaire est la plus courte; les obliques qui s'éloignent le plus de la perpendiculaire, sont les plus longues; les obliques également éloignées de la perpendiculaire sont égales, et réciproquement, n. 27.

Tout point d'une perpendiculaire élevée sur le milieu d'une ligne, est également éloigné des extrémités de cette ligne, et tout point hors de cette ligne perpendiculaire n'est pas également éloigné de ces mêmes extrémités, n. 29 et 30.

Deux lignes droites sont parallèles lorsqu'elles sont

Digitized by Google

par-tout également éloignées l'une de l'autre, n. 36.

Deux droites parallèles, étant coupées par une sécante, les angles interne-externes du même côté sont égaux; les angles alterne-internes ou externes sont égaux; les angles internes du même côté, pris ensemble, valent deux droits, ainsi que les externes du même côté, et réciproquement, n. 37 et suiv.

Deux angles tournés d'un même côté, et qui ont leurs côtés parallèles, sont égaux, n. 43.

Une ligne droite ne peut rencontrer la circonférence en plus de deux points, n. 47.

Dans un même demi-cercle les plus grandes cordes soutendent les plus grands arcs, et réciproquement, *Ibid.*

Une sécante est une ligne qui est en partie au-dehors et en partie au-dedans du cercle. Une tangente est une ligne appliquée contre la circonférence, *Ibid.*

Une tangente ne peut rencontrer la circonférence qu'en un seul point, n. 48.

Le rayon mené du centre au point d'attouchement, est perpendiculaire à la tangente, et réciproquement, *Ibid.*

Le point d'attouchement de deux circonférences est dans la droite qui joint leurs centres, n. 50.

Le centre d'un cercle, le milieu d'une corde et le milieu de son arc, sont dans une même droite perpendiculaire à cette corde; en sorte qu'une droite perpendiculaire à la corde qui passe par un de ces points, passe aussi par les deux autres, et réciproquement, n. 52 et suiv.

Deux cordes parallèles interceptent entr'elles des arcs égaux, n. 60.

Un angle qui a son sommet à la circonférence, et qui est formé par deux cordes ou par une tangente et une corde, a pour mesure la moitié de l'arc compris entre ses côtés, n. 63.

Les angles à la circonférence, qui comprennent entre leurs côtés, des

Digitized by Google

arcs égaux ou le même arc, sont égaux entr'eux, n. 64.

Un angle à la circonférence est droit quand ses côtés passent par les extrémites du diamètre, n. 65.

Un angle à la circonférence formé par une corde et le prolongement d'une autre, a pour mesure la moitié des deux arcs soutendus par ces cordes, n. 69.

Un angle qui a son sommet entre le centre et la circonférence, a pour mesure la moitié des deux arcs compris entre ses côtés et leurs prolongemens, n. 70.

Un angle qui a son sommet hors du cercle, a pour mesure la moitié de la différence des deux arcs compris entre ses côtés, n. 71.

Un triangle rectiligne est un espace renfermé par trois lignes droites, n. 73.

Dans tout triangle, la somme de deux côtés est plus grande que le troisième, *Ibid.*

Un triangle est équilatéral quand ses trois côtés sont égaux, isocèle quand deux seulement sont égaux, scalène quand les trois côtés sont inégaux, *Ibid.*

Un triangle qui a un angle droit est nommé *rectangle;* celui qui a un angle obtus, *obtus-angle;* et celui qui a ses trois angles aigus, *acutangle*, n. 75.

La somme des trois angles de tout triangle rectiligne, vaut deux angles droits, n. 74.

L'angle extérieur d'un triangle vaut la somme des deux angles intérieurs opposés, n. 75.

Dans tout triangle, les angles opposés aux côtés égaux, sont égaux, et réciproquement, n. 77.

Dans un même triangle, le plus grand côté est opposé au plus grand angle, et le plus petit côté au plus petit angle, et réciproquement, n. 78.

Deux triangles sont parfaitement égaux; 1°. quand ils ont un angle égal compris entre deux côtés égaux chacun à chacun, n. 80.

2°. Quand ils ont un côté égal adjacent à deux angles

égaux chacun à chacun, n. 81.

3°. Lorsqu'ils ont les trois côtés égaux chacun à chacun, n. 83.

Si deux parallèles sont interceptées entre deux autres parallèles, elles sont égales, et réciproquement, n. 82.

Un polygone est une figure de plusieurs côtés, n. 84.

On appelle *diagonale* toute ligne menée, dans un polygone, d'un angle à un autre, n. 82.

La somme de tous les angles d'un polygone quelconque est égale à deux fois autant d'angles droits qu'il y a de côtés moins deux, et les angles extérieurs valent quatre angles droits, n. 86 et 87.

Un polygone est régulier lorsque tous ses côtés et ses angles sont égaux, n. 88.

On peut faire passer une circonférence de cercle par tous les angles d'un polygone régulier, n. 89.

Le côté de l'hexagone régulier est égal au rayon du cercle circonscrit, n. 92.

L'apothême d'un polygone régulier est une perpendiculaire menée du centre sur l'un des côtés; tous les apothêmes d'un polygone régulier sont égaux, n. 91.

Dans toute proportion géométrique, la somme des antécédens est à la somme des conséquens, comme la différence des antécédens est à la différence des conséquens, n. 96.

La somme des deux premiers termes d'une proportion, est à la somme des deux derniers, comme la différence des deux premiers est à la différence des deux derniers, n. 98.

Une droite menée dans un triangle parallèlement à l'un des côtés, coupe les deux autres côtés en parties proportionnelles, et réciproquement, n. 102.

Si d'un même point on mène plusieurs droites qui rencontrent deux parallèles, ces droites seront coupées proportionnellement par les parallèles, n. 103.

Une droite qui divise un angle d'un triangle, en deux également, coupe

le côté opposé en deux parties proportionnelles aux côtés adjacens, n. 104.

Deux triangles sont semblables ; 1°. quand ils ont leurs angles égaux chacun à chacun, n. 109.

Et par conséquent, lorsque deux angles de l'un sont égaux chacun à chacun à deux angles de l'autre, n. 110.

Quand les côtés de l'un sont parallèles ou perpendiculaires aux côtés de l'autre, n. 111.

2°. Lorsqu'ils ont un angle égal compris entre deux côtés proportionnels, n. 113.

3°. Quand les trois côtés de l'un sont proportionnels aux trois côtés de l'autre, n. 114.

La perpendiculaire abaissée de l'angle droit d'un triangle rectangle, sur l'hypothénuse, le partage en deux triangles qui lui sont semblables, et par conséquent semblables entr'eux, n. 112.

La perpendiculaire menée de l'angle droit sur l'hypothénuse, est moyenne proportionnelle entre les deux parties de l'hypothénuse, *Ibid.*

Chaque côté de l'angle droit, est moyen proportionnel entre l'hypothénuse et le segment correspondant, *Ibid.*

Si par un même point on mène plusieurs droites qui rencontrent deux parallèles, les parties de l'une de ces parallèles seront proportionnelles aux parties correspondantes de l'autre, n. 115.

Deux cordes qui se coupent dans un cercle, ont leurs parties réciproquement proportionnelles, n. 120.

Une perpendiculaire abaissée d'un point de la circonférence sur un diamètre, est moyenne proportionnelle entre les parties de ce diamètre, n. 121.

Deux sécantes menées d'un même point pris hors du cercle, sont réciproquement proportionnelles à leurs parties extérieures, n. 123.

Si d'un même point pris hors du cercle, on mène une tangente et une sécante, la tangente est moyenne

Digitized by Google

proportionnelle entre la sécante entière et sa partie extérieure, n. 124.

Une droite est coupée en moyenne et extrême raison, lorsqu'elle est coupée en deux parties, dont l'une est moyenne proportionnelle entre la ligne entière et l'autre partie, n. 125.

Si de deux angles correspondans de deux polygones semblables, on mène des diagonales aux autres angles, les deux polygones seront partagés en un même nombre de triangles semblables chacun à chacun, et réciproquement, n. 127, 128.

Les contours des figures semblables sont entr'eux comme leurs côtés homologues, n. 129.

Les cercles étant des figures semblables, leurs circonférences sont entr'elles comme leurs rayons, ou comme leurs diamètres, n. 131.

Un parallélogramme est un quadrilatère, dont les côtés opposés sont parallèles, n. 133.

On l'appelle *rhomboïde* quand ses côtés contigus ne sont pas égaux entr'eux, et qu'aucun de ses angles n'est droit, *Ibid.*

Rhombe, quand les quatre côtés sont égaux entr'eux, et qu'il n'a point d'angles droits, *Ibid.*

Rectangle, quand les angles sont droits et les côtés contigus inégaux, *Ibid.*

Quarré, quand tous les côtés sont égaux, et les angles droits, *Ibid.*

Le trapèze est un quadrilatère qui n'a que deux côtés opposés parallèles, *Ibid.*

Un triangle rectiligne est la moitié d'un parallélogramme de même base et de même hauteur, n. 134.

Les parallélogrammes de même base et de même hauteur sont égaux en surface, n. 135.

Il en est de même des triangles, n. 136.

La surface d'un parallélogramme est égale au produit de sa base par sa hauteur, n. 139.

La surface d'un triangle est égale à la moitie du pro-

duit de sa base par sa hauteur, n. 141.

La surface d'un trapèze est égale au produit de sa hauteur, par une ligne menée parallèlement aux deux bases et à distance égale de ces bases, n. 142.

La surface d'un polygone régulier, est égale à la moitié du produit de son contour, par l'apothême, n. 144.

La surface d'un cercle est égale à sa circonférence multipliée par la moitié du rayon, n. 145.

Un secteur circulaire est une portion de cercle terminée par un arc et deux rayons ; et l'on nomme *segment circulaire* une surface terminée par un arc et sa corde, n. 147.

On appelle *toisé des surfaces* la manière de trouver la valeur d'une surface, dont les dimensions sont évaluées en toises et parties de la toise, n. 151.

On trouve à la table les différentes subdivisions de la toise quarrée, pag. 270.

Les surfaces des parallélogrammes et des triangles, sont entr'elles comme les produits de leurs bases et de leurs hauteurs, n. 156 et 158.

Les parallélogrammes de même base sont entr'eux comme leurs hauteurs, et ceux qui ont même hauteur sont entr'eux comme leurs bases, *Ibid.*

Il en est de même des triangles, *Ibid.*

Le quarré du rayon est à la surface du cercle, comme le diamètre est à la circonférence, n. 157.

Les surfaces des parallélogrammes ou des triangles semblables, sont entr'elles comme les quarrés de leurs côtés homologues, n. 159 et 160.

Cette propriété s'étend à toutes les figures semblables, n. 161.

Les cercles étant des figures semblables, leurs surfaces sont entr'elles comme les quarrés de leurs rayons ou de leurs diamètres, n. 162.

Dans tout triangle rectangle, le quarré de l'hypothénuse est égal à la somme des quarrés construits sur

Digitized by Google

les deux autres côtés, n. 164.

Le quarré de l'hypothénuse est à chacun des quarrés des autres côtés, comme l'hypothénuse est à chacun de ses segmens correspondans à ces côtés, n. 171.

Si de différens points de la circonférence d'un cercle, on mène des cordes à l'extrémité d'un diamètre, et des perpendiculaires à ce diamètre; les quarrés des cordes seront proportionnels aux parties du même diamètre, comprises entre les perpendiculaires correspondantes, et l'extrémité du diamètre où ces cordes aboutissent, n. 173.

Une ligne droite ne peut être en partie dans un plan, et en partie élevée ou abaissée à son égard, n. 175.

Deux droites qui se coupent sont dans un même plan, n. 177.

La rencontre ou l'intersection de deux plans est une ligne droite, n. 178.

Par une même ligne droite on peut faire passer une infinité de plans différens, *Ibid.*

Une ligne est perpendiculaire à un plan quand elle ne penche d'aucun côté de ce plan, n. 179.

Une ligne est perpendiculaire à un plan, lorsqu'elle est perpendiculaire à deux lignes menées par son pied dans ce plan, n. 180.

Si d'un point pris hors d'un plan on abaisse une perpendiculaire et une oblique à ce plan, que l'on joigne leurs pieds par une droite, et que par le pied de l'oblique on mène dans le même plan, une perpendiculaire à cette droite; elle sera aussi perpendiculaire à l'oblique, n. 183.

Un plan est perpendiculaire à un autre plan, quand il passe par une droite perpendiculaire à ce dernier, n. 186.

Si deux plans sont perpendiculaires l'un à l'autre, et que d'un point pris dans un de ces plans on mène une perpendiculaire à leur commune section, elle sera perpendiculaire à l'autre plan, et réciproquement, n. 187 et 188.

Deux perpendiculaires à un

Digitized by Google

même plan sont parallèles, n. 188.

Deux droites parallèles à une troisième sont parallèles entr'elles ; n. 189.

La commune section de deux plans perpendiculaires à un troisième, est perpendiculaire à ce dernier, n. 190.

Un angle-plan est l'ouverture de deux plans qui se rencontrent, n. 191.

La mesure d'un angle-plan est la même que celle de l'angle rectiligne formé par deux droites menées dans ces plans perpendiculairement au même point de leur section commune, n. 192.

Deux plans sont parallèles quand ils sont par-tout également éloignés l'un de l'autre, n. 196.

Si deux plans parallèles sont coupés par un troisième, leurs sections sont parallèles ; n. 197.

Les angles-plans, formés par des plans qui se rencontrent ou qui se coupent, ont les mêmes propriétés que les angles rectilignes, n. 193 et 198.

Si d'un point pris hors d'un plan, on mène plusieurs lignes à ce plan, elles seront coupées proportionnellement par un plan parallèle au premier, et formeront dans ces plans des figures semblables en joignant leurs points de rencontre par des droites, n. 199.

Ces figures semblables sont entr'elles comme les quarrés de leurs distances au point de concours des lignes qui rencontrent les plans, n. 202.

Si du même point de concours on mène à ces plans d'autres droites, qui y formeront pareillement des figures semblables ; ces figures seront proportionnelles aux premières, n. 201.

Un prisme est un solide engendré par un plan qui se meut parallèlement à lui-même le long d'une droite, n. 204.

Un prisme est droit ou oblique suivant que ses arêtes sont perpendiculaires ou obliques au plan générateur ; *Ibid.*

Un parallélipipède est un

prisme, dont la base est un parallélogramme ; on le nomme *parallélipipède rectangle* lorsqu'il est droit, et que sa base est un rectangle, *Ibid.*

Le cube est un parallélipipède rectangle, dont la base est un quarré, et la hauteur égale au côté de ce quarré, *Ibid.*

Le cylindre est un prisme, dont la base est un cerle, et l'on nomme *axe du cylindre* la droite qui joint les centres des deux bases opposées, n. 205.

La pyramide est un solide terminé par un polygone qui lui sert de base, et par autant de faces triangulaires qu'il y a de côtés dans cette base, lesquelles se réunissent en un même point, qu'on appelle le *sommet de la pyramide*, n. 206.

Une pyramide est régulière lorsque le polygone qui lui sert de base est régulier, et qu'en même-temps la perpendiculaire abaissée du sommet passe par le centre de ce polygone, *Ibid.*

Le cône est une pyramide, dont la base est un cercle ; il est droit ou oblique, suivant que la droite menée du sommet au centre de la base est perpendiculaire ou oblique à cette base, n. 207.

La sphère est un solide, engendré par la révolution d'un demi-cercle autour de son diamètre, n. 208.

On appelle *grand cercle de la sphère*, celui qui a même diamètre que la sphère, *Ibid.*

Le secteur sphérique est un solide engendré par la révolution d'un secteur circulaire autour du rayon ; et l'on nomme *calotte sphérique* la surface engendrée dans cette révolution, par l'arc du secteur circulaire, *Ibid.*

Le segment sphérique est un solide formé par la révolution d'un demi segment circulaire autour de sa flèche, *Ibid.*

On appelle *solides semblables* ceux qui sont terminés par un même nombre de faces semblables chacune à chacune, et semblablement disposées, n. 209.

Les arêtes et les sommets des

angles solides correspondans, sont des lignes, et des points, semblablement disposés dans deux solides semblables, n. 210.

Les triangles, dont les côtés joignent, dans deux solides semblables, les sommets de deux angles solides correspondans, sont semblables, et semblablement disposés, n. 211.

Les diagonales qui joignent les sommets d'angles solides, correspondans de deux solides semblables, sont entr'elles comme les arêtes homologues, n. 212.

Les perpendiculaires abaissées des sommets de deux angles solides correspondans dans deux solides semblables, sont proportionnelles aux arêtes homologues, n. 214.

La surface d'un prisme, sans y comprendre ses deux bases, est égale au produit de la directrice, multipliée par le contour d'une section, à laquelle cette directrice est perpendiculaire, n. 216.

Si le prisme est droit, la surface, sans y comprendre les deux bases, est égale au contour de sa base, multiplié par sa hauteur, n. 217.

La surface d'un cylindre droit, non compris les deux bases, est égale au produit de sa hauteur par la circonférence de sa base, n. 218.

La surface d'une pyramide régulière est égale au contour de sa base multiplié par la moitié de l'apothême de la pyramide, n. 219.

La surface d'un cône droit est égale au produit de la circonférence de sa base, par la moitié du côté de ce cône, n. 220.

La surface d'un cône droit tronqué, à bases parallèles, est égale au produit du côté de ce tronc, par la circonférence de la section faite à égales distances des bases opposées; n. 222.

La surface d'une sphère est égale au produit de la circonférence d'un de ses grands cercles, multiplié par le diamètre, n. 223.

Elle est égale à la surface convexe du cylindre circonscrit, n. 224.

Digitized by Google

Elle est aussi quadruple de celle de son grand cercle, n. 225.

La surface d'une calotte sphérique est égale au produit de sa flèche, par la circonférence de l'un des grands cercles de la sphère, n. 226.

Les surfaces des prismes droits, (sans y comprendre celles des bases), sont entr'elles comme les produits de leurs hauteurs, par les contours de leurs bases, n. 228.

Les surfaces des prismes droits de même hauteur, sont entr'elles comme les contours de leurs bases; elles sont comme les hauteurs, si les contours sont égaux, n. 229.

Les surfaces des cônes droits sont entr'elles comme les produits de leurs côtés, par les circonférences des bases, ou par les rayons, ou par les diamètres de ces bases, n. 230.

Les surfaces des solides semblables, sont entr'elles comme les quarrés de leurs lignes homologues, n. 231.

Les surfaces de deux sphères sont entr'elles comme les quarrés de leurs rayons ou de leurs diamètres, n. 232.

Deux prismes de même base et de même hauteur, sont égaux en solidité, n. 234.

La solidité d'un prisme quelconque est égale au produit de sa base, par sa hauteur, n. 236.

La solidité d'une pyramide ou d'un cône, est égale au tiers du produit de sa base, par sa hauteur, n. 242.

La solidité de la sphère est égale aux deux tiers du cylindre circonscrit, n. 245.

La solidité d'un secteur sphérique est égale au produit de la surface de sa calotte, par le tiers du rayon, n. 247.

La solidité d'un segment sphérique est égale à celle d'un cylindre, qui a pour rayon la flèche, et pour hauteur le rayon moins le tiers de la flèche, n. 248.

On appelle *prisme tronqué* le solide qui reste lorsqu'on a séparé une partie d'un prisme par un plan incliné à la base, n. 250.

Si des trois angles de l'une des bases d'un prisme triangulaire tronqué, on abaisse des perpendiculaires sur l'autre base, sa solidité est égale au produit de cette dernière base, multipliée par le tiers de la somme des trois perpendiculaires, n. 252.

On appelle *toisé des solides* la manière de trouver la valeur d'un solide dont les dimensions sont évaluées en toises et parties de la toise, n. 259.

Les différentes subdivisions de la toise-cube sont rapportées dans la table, page 271.

La mesure en usage pour les bois, s'appelle *solive;* on en trouve les subdivisions dans la table, n. 264.

Les prismes sont entr'eux comme les produits de leurs bases et de leurs hauteurs, n. 268.

Les prismes de même hauteur sont entr'eux comme leurs bases, et ceux qui ont même base sont entre eux comme leurs hauteurs, *Ibid.*

Les solidités de deux corps semblables, sont entr'elles comme les cubes de leurs lignes homologues, n. 270.

Les solidités de deux sphères sont entr'elles comme les cubes de leurs rayons ou de leurs diamètres, *Ibid.*

La trigonométrie plane enseigne à déterminer trois des six parties d'un triangle rectiligne, par la connoissance des trois autres parties, parmi lesquelles il doit se trouver au moins un côté, n. 271.

Quand on connoît deux côtés d'un triangle, et l'angle opposé à l'un de ces côtés, on ne peut déterminer l'angle opposé à l'autre, qu'autant que l'on connoît si le troisième angle est aigu ou obtus, *Ibid.*

Le sinus droit, ou simplement le sinus d'un arc ou d'un angle, est la moitié de la corde d'un arc double de celui qui mesure cet angle, n. 274.

Le cosinus d'un arc ou d'un angle, est le sinus du complément de cet arc ou de cet angle, *Ibid.*

Le sinus-verse d'un arc est la différence entre le rayon

et le cosinus de cet arc, *Ibid.*

Le sinus et le cosinus d'un angle sont les mêmes que le sinus et le cosinus de son supplément, n. 279.

Le sinus de 90^d est égal au rayon; on le nomme aussi *sinus total*, n. 278.

Le sinus de 30^d est égal à la moitié du sinus total, et la tangente de 45^d est égale au rayon, n. 275 et 276.

La tangente et la sécante d'un angle, sont les mêmes que la tangente et la sécante de son supplément, n. 280.

Le cosinus d'un arc est égal à la racine quarrée de la différence du quarré de son sinus au quarré du rayon, n. 283.

Le sinus de la moitié d'un arc est égal à la moitié de la racine quarrée du quarré du sinus de l'arc entier, joint au quarré de son sinus verse, n. 284.

Le sinus d'un arc double est égal à deux fois le sinus de l'arc simple, multiplié par son cosinus, et divisé par le rayon, n. 285.

Le sinus de la somme ou de la différence de deux arcs, est égal à la somme ou à la différence des produits du sinus de l'un, multiplié par le cosinus de l'autre, divisée par le rayon, n. 286.

Le cosinus de la somme ou de la différence de deux arcs est égal à la différence ou à la somme des produits des deux sinus et des deux cosinus de ces arcs, divisée par le rayon, n. 287.

La somme des sinus de deux arcs, est à la différence de ces mêmes sinus, comme la tangente de la moitié de la somme de ces deux arcs est à la tangente de la moitié de leur différence, n. 289.

Dans tout triangle rectangle;

1°. Le rayon ou sinus total, est au sinus d'un des angles aigus, comme l'hypothénuse est au côté opposé à cet angle aigu, n. 299.

2°. Le rayon est à la tangente d'un des angles aigus, comme le côté ad-

Digitized by Google

jacent à cet angle est au côté qui lui est opposé, n. 300.

Dans tout triangle rectiligne, les sinus des angles sont proportionnels aux côtés qui leur sont opposés, n. 303.

La plus grande de deux quantités est égale à la moitié de leur somme, plus la moitié de leur différence; et la plus petite est égale à la moitié de leur somme, moins la moitié de leur différence, n. 305.

Dans tout triangle rectiligne, si d'un angle on abaisse une perpendiculaire sur le côté opposé, ce côté sera à la somme des deux autres, comme leur différence est à la différence ou à la somme des segmens, formés par la perpendiculaire, n. 306.

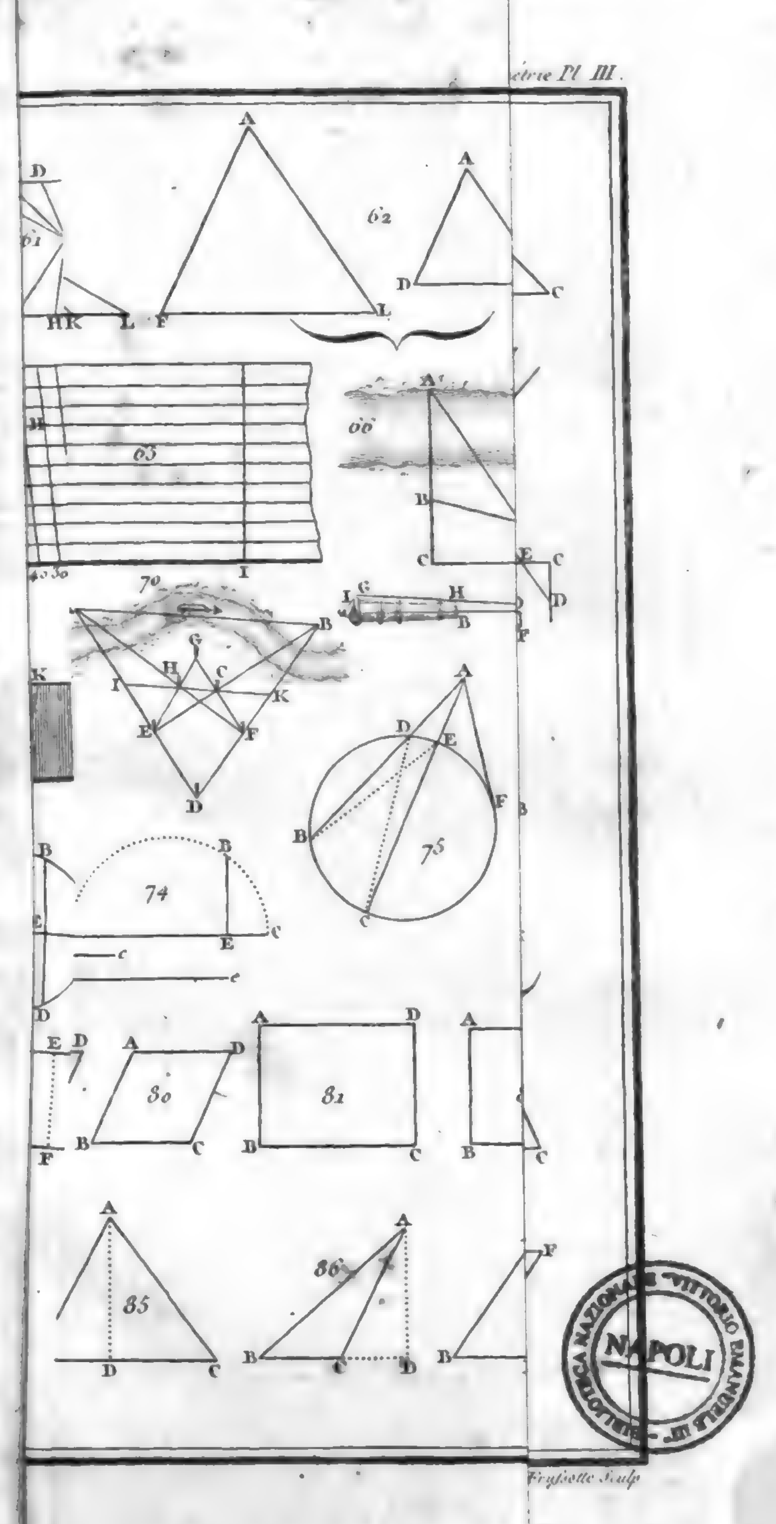
Dans tout triangle rectiligne, la somme de deux côtés est à leur différence, comme la tangente de la moitié de la somme des deux angles opposés à ces côtés, est à la tangente de la moitié de la différence de ces mêmes angles, n. 309.

Fin de la Table des Principes.

606750
SBN

Frussotte Sculp.

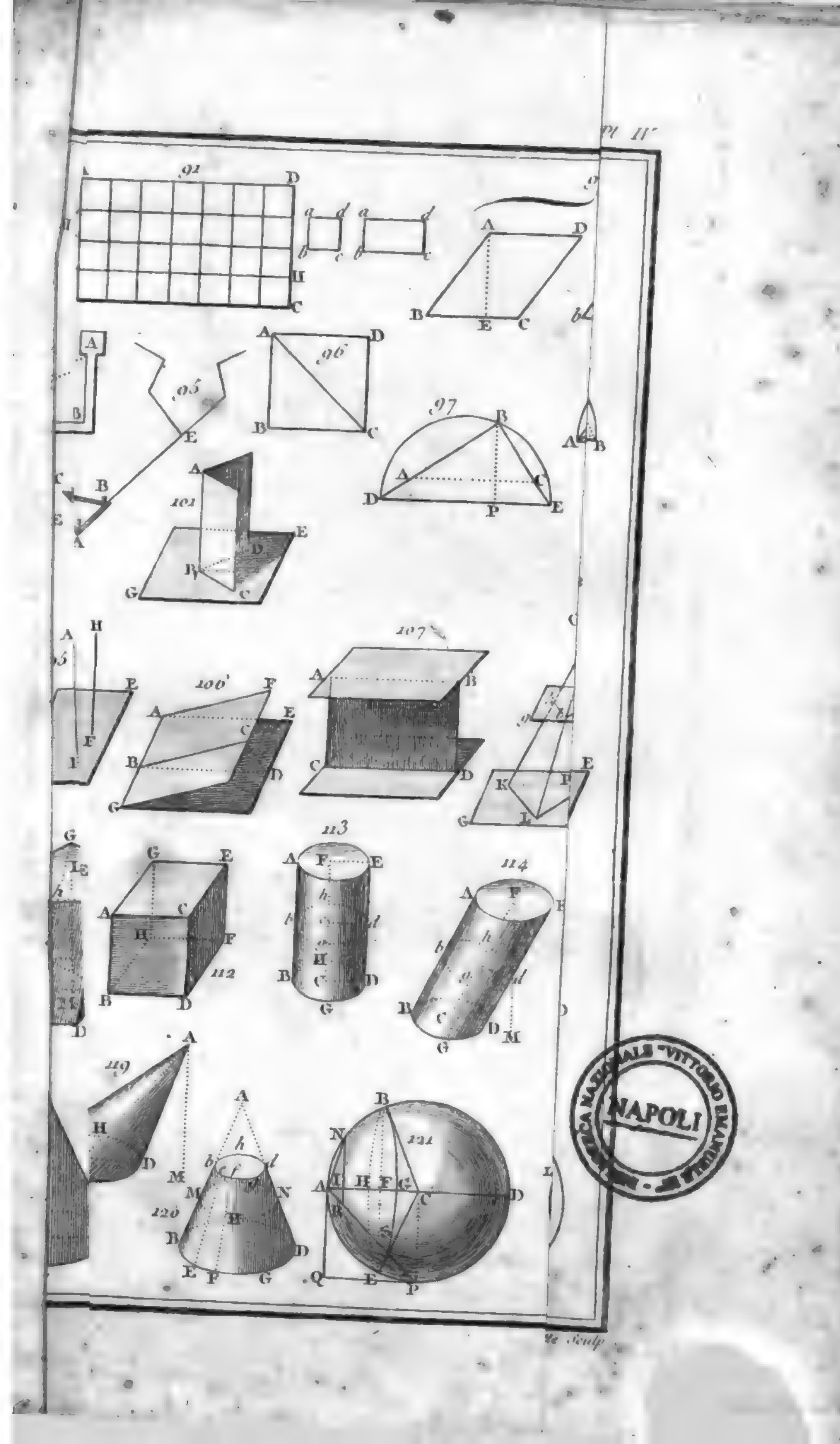
NAPOLI

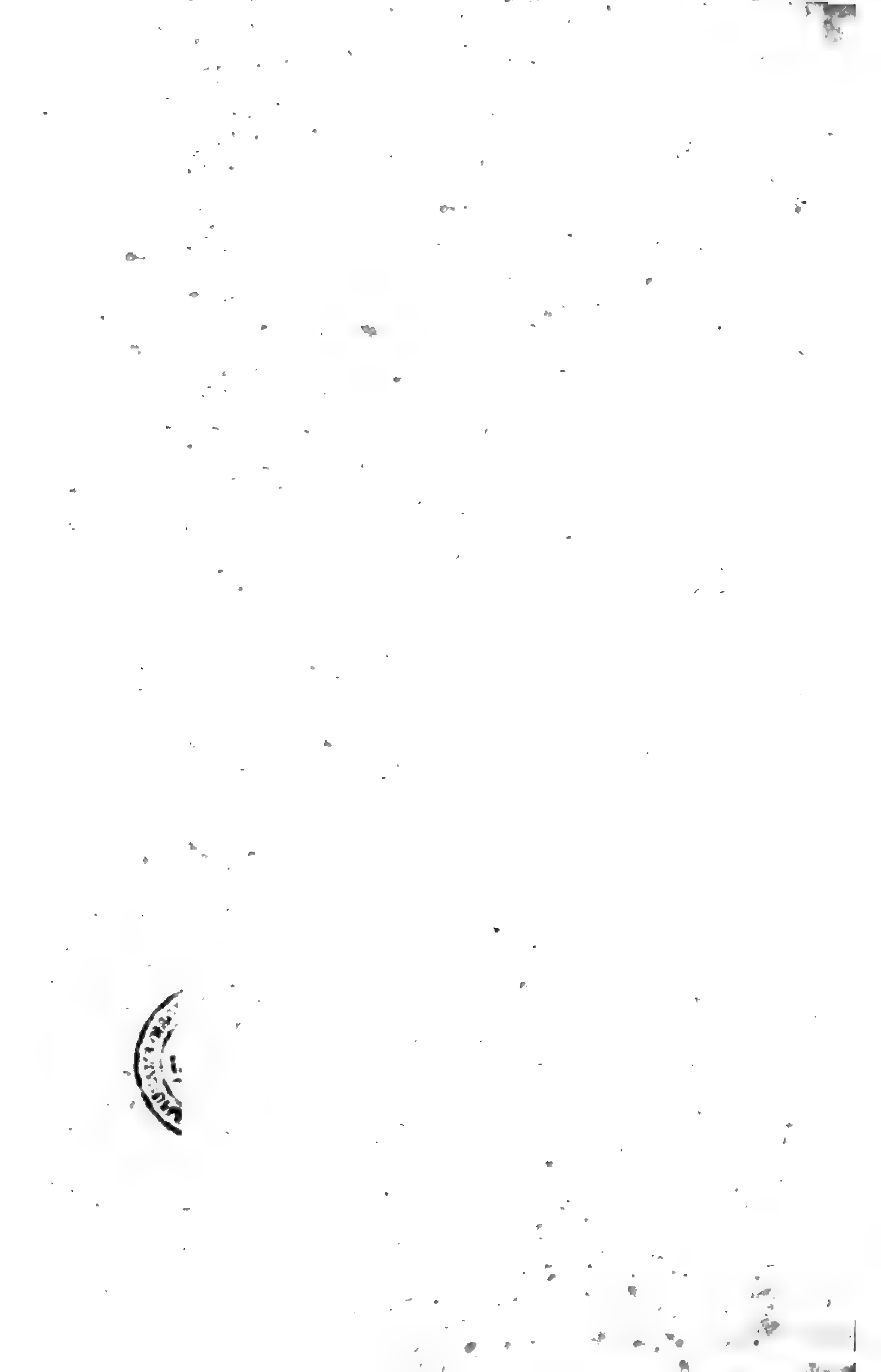


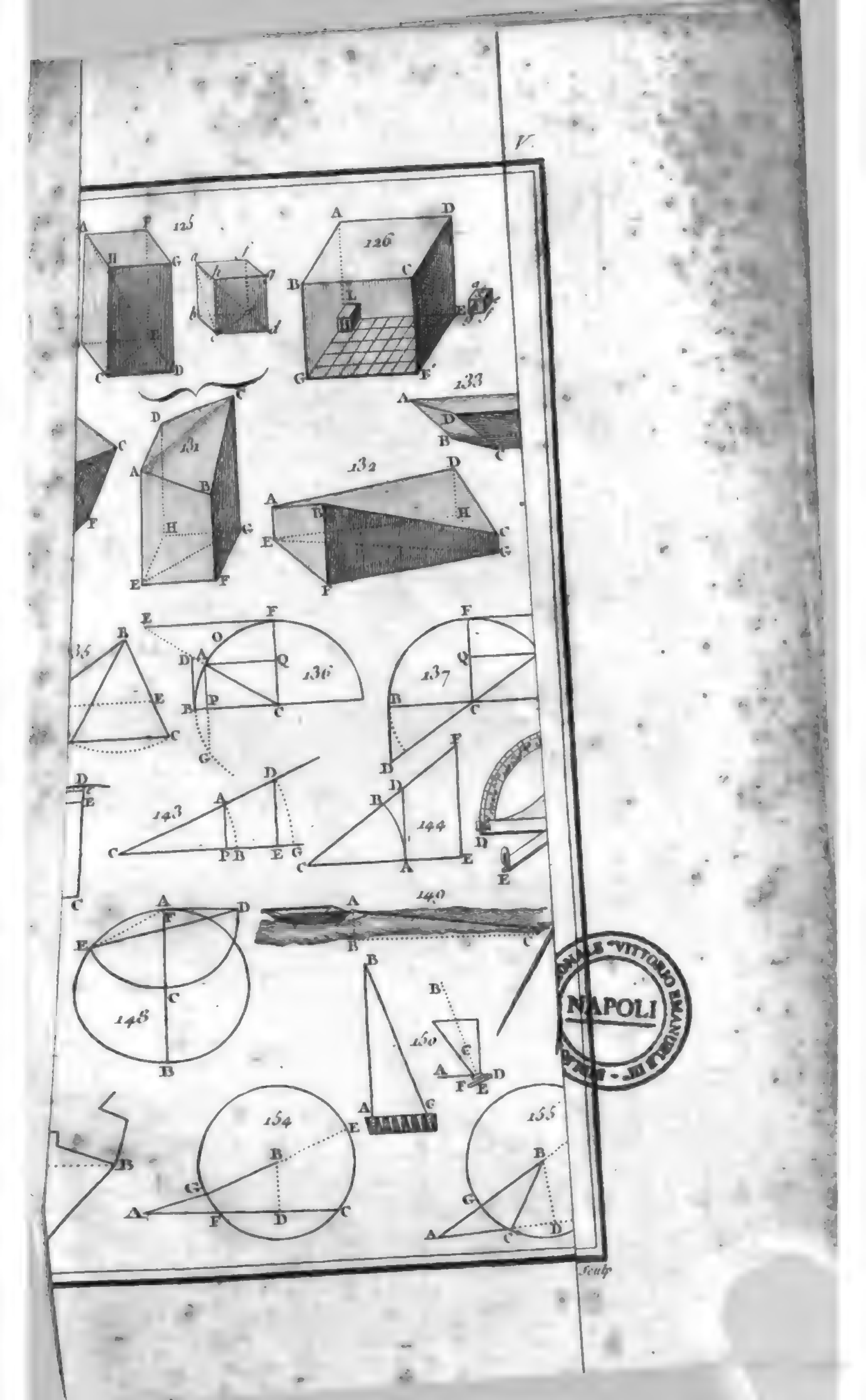
Frussotte Sculp.

BIBLIOTECA NAZIONALE "VITTORIO EMANUELE III" NAPOLI

Digitized by Google






V.
126
131
132
133
136
137
143
144
140
148
150
154
155
Sculp
NAPOLI

Geometrie Pl. II.

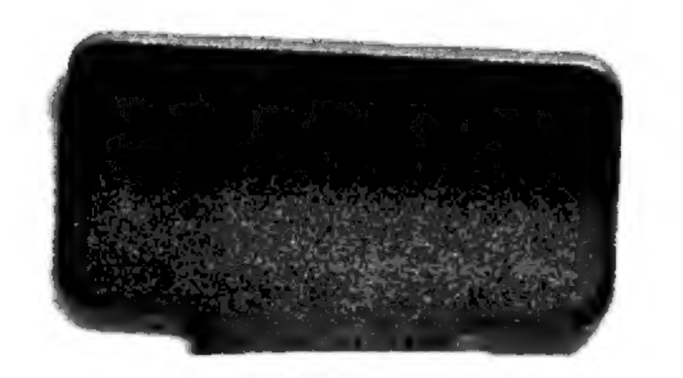
Frussotte Sculp.

NAPOLI

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google



Digitized by Google

Digitized by Google